Zelf modelleren,

wat ervaar je dan?

INHOUDSOPGAVE

WISKUNDE IN WETENSCHAP

Visie op een domein in wiskunde D

[Universiteit Twente (UT) – kerngroep]

Inleiding

Wat is wetenschapsbeoefening, welke rol speelt wiskunde hierin, en wat betekent dat voor het onderwijs in de bovenbouw van het VWO?
Geïnspireerd door een oproep van de vernieuwingscommissie cTWO gericht aan het adres van het wetenschappelijk onderwijs, wordt er dit schooljaar aan de Universiteit Twente een leerstofdomein 'Wiskunde in Wetenschap' ontwikkeld door een kerngroep van UT- en vwo-docenten. Dit lesmateriaal is bedoeld voor het nieuwe vak Wiskunde D, maar (deels) ook voor Natuur, Leven en Technologie (NLT). Het wil aan de hand van uitdagende cases de leerlingen laten ervaren dat het proces van (wiskundig) modelleren problemen doet begrijpen en ze toegankelijk maakt voor oplossingen.

Wetenschap

Wetenschap, bedreven vanuit nieuwsgierigheid of doelgerichtheid, stelt zichzelf vragen om (natuur)verschijnselen te kunnen begrijpen. Om het denken richting te geven en om van gedachten te wisselen is een 'taal' vereist waarin begrippen worden ontwikkeld. Deze begrippen beschrijven de meest in het oog lopende aspecten van het verschijnsel. Zij dienen zo precies mogelijk geformuleerd te worden en moeten eenduidig zijn.
Er worden niet alleen begrippen, maar ook relaties tussen die begrippen gezocht; juist daardoor ontstaat inzicht in het probleem. Of het leidt tot de noodzaak meer begrippen in te voeren en/of andere relaties te onderzoeken. Al doende gaan we meer 'begrijpen' van het verschijnsel. Dit geheel van begrippen en relaties is een bouwwerk dat een 'model' is van het te onderzoeken probleemgebied.
Omgekeerd, bij het denken of communiceren over welk onderwerp dan ook gebruiken we een (al dan niet expliciet gemaakt) achterliggend model. Als verschillende mensen onbewust verschillende modellen gebruiken kan dat gemakkelijk aanleiding geven tot misverstanden of onbegrip. Bijvoorbeeld: algemene uitspraken over economie, gezondheid etc. hangen voornamelijk af van welk aspect men daarvan wil benadrukken. Juist als daarvoor gekwantificeerde grootheden worden gebruikt (winst van bedrijven, aantal werklozen, cholesterolgehalte, etc.) moet het belang daarvan worden onderkend. De keuze van de beschouwde grootheden kan de discussie over de resultaten van het model verhelderen.

Voorbeelden uit het dagelijkse leven zoals hierboven gegeven kunnen leerlingen het belang illustreren van het expliciet maken van het gebruikte model. Het valt daarbij op te merken dat bovenstaande geldt voor alle wetenschappen, van natuurwetenschappen tot geestes- en sociale wetenschappen. Bovendien moet benadrukt worden dat alleen ‘logisch redeneren’ (meestal stilzwijgend) geaccepteerd is als methode om uit gekozen begrippen/grootheden en daarvan afgeleide (of aangenomen) relaties conclusies te trekken. De inductieve manier van redeneren wordt vaak toegepast bij het opstellen van een model, waarbij het logisch redeneren slechts ten dele aan de orde is. Er spelen nogal eens voorkeuren, ingeslepen (voor)oordelen en toevalligheden, mee. Van belang wordt dan de terugkoppeling van meetresultaten of uitkomsten van berekeningen naar de werkelijkheid.

Wiskunde

In het voorafgaande is betoogd dat het exact formuleren van begrippen en relaties tot een model leidt dat het denkkader gaat vormen waarmee via logisch redeneren kennis wordt ontwikkeld over het te onderzoeken probleemgebied. Met al deze activiteiten wordt in veel gevallen wel wat slordig omgesprongen, maar dit erkent in principe de nauwkeurige werkwijze van de wiskunde als ideaaltypisch voorbeeld. Dit is op zich al voldoende reden om modelleren te zien als een (toegepast) wiskundige activiteit.

Meer klassiek gesproken, en niet minder belangrijk maar wel meer vertrouwd, komt de wiskunde in beeld zodra de boven beschreven structuur geformaliseerd wordt en wiskundige technieken worden gebruikt voor nader onderzoek. In bijvoorbeeld de sociologie worden intermenselijke relaties gerepresenteerd als ‘grafen’ en in bijvoorbeeld natuurkunde wordt het begrip ‘afgeleide’ als maat voor verandering geïntroduceerd. In het vertalen van begrippen naar meetbare grootheden (buren in een graaf, snelheid bij verplaatsing) bedrijft men ook wiskunde. Relaties geven uitdrukking aan ordening of aan een functioneel verband (dat kan een ongelijkheid zijn, een algebraïsche vergelijking, een differentiaalvergelijking, etc.). Het geheel van gekozen grootheden en opgestelde relaties vormt het wiskundig model van de (benadering van de) werkelijkheid.

Dit modelleerproces kan op elk niveau, afhankelijk van het leerjaar, gestalte krijgen. De concretisering van het abstractieniveau, en het manipuleren met parameters zijn daarbij bepalend. In hoeverre het model de werkelijkheid benadert is afhankelijk van de selectie van grootheden en relaties. Een complexer model zal meer wiskunde achtergrond vereisen, zowel voor het formuleren van het model, de analyse van het model, als ook voor de interpretatie van het resultaat van het onderzoek in het model.

Modules

Het domein Wiskunde in Wetenschap heeft binnen Wiskunde D (vwo) een studielast van 80 uren. Wij werken eraan om dit domein te laten bestaan uit modules die in opeenvolgende leerjaren kunnen worden ingezet. Tevens is het studiemateriaal (deels) inzetbaar bij het vak NLT. Eén module staat bij ons voor 20 studielasturen. De kerngroep werkt aan verschillende modules die in combinatie het domein Wiskunde in Wetenschap kunnen opvullen (ook aan de universiteiten van Amsterdam, Delft, Eindhoven en Nijmegen worden modules Wiskunde in Wetenschap ontwikkeld).

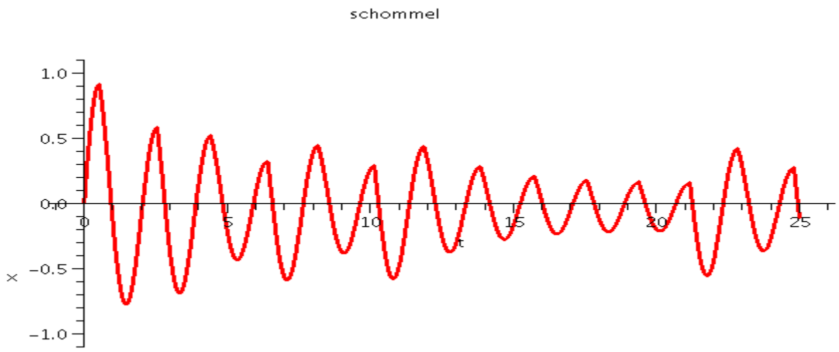
Voor klas 4 wordt een algemene inleidende module ‘Modelleren’ geschreven met eenvoudige voorbeelden uit diverse wetenschapsgebieden. We willen ernaar streven dat deze module ook aantrekkelijk zal zijn voor leerlingen van andere dan het N&T-profiel. Daarnaast ontwikkelt de groep specifiekere modules met een bepaald thema (kilometerheffing, tsunamis, resonantie, en planeetbewegingen) voor klas 5 en 6 waaraan een onderzoeksopdracht (aan de universiteit of eventueel op afstand) kan worden gekoppeld. De door de kerngroep ontwikkelde modules bestaan uit leerlingmateriaal (zie Figuur 1 en Figuur 2) en docentmateriaal.

Figuur 1

Schaalmodel (Märklin) van een locomotief.

Neem aan dat deze locomotief met een snelheid van 60 km/u rijdt.

Hoe snel moet je het schaalmodel laten rijden om het ‘echt’ te laten lijken?



Figuur 2 *Beschrijf het precieze verband tussen de figuur en de grafiek*

Het idee is dat leerlingen open opdrachten krijgen, kort en helder geformuleerd. De docenten echter zullen voorzien worden van een uitgebreide bundel met theoretische achtergrondartikelen en praktische tips (computersimulaties, applets, etc.).
Theoretisch berust deze aanpak op een constructivistische visie op leren en onderwijzen. Concreet betekent dat dat het leren plaatsvindt vanuit probleemgeoriënteerde activiteiten in een rijke leeromgeving – leerlingen kennen de weg naar allerlei hulpmiddelen. Het coöperatief (groeps)leren neemt een centrale plaats in, sámen wordt er aan problemen gewerkt.

Didactiek

Bij dit type leren hoort een daaraan aangepaste didactiek en een andere rol van de docent. De module zoals wij die voor ogen hebben is niet vergelijkbaar met een hoofdstuk uit één van de gebruikelijke wiskundemethodes. Wij ontwikkelen geen stapelopgaven in steeds veranderende contexten. We gaan uit van één rijke context, en willen het denken van leerlingen stimuleren door niet van deze ene context af te wijken. Het leerproces wordt niet gestuurd door de opgaven in het boek, maar door vragen die leerlingen zèlf stellen. Dat gaat niet vanzelf, omdat leerlingen niet gewend zijn op deze manier met wiskunde bezig te zijn. Dit kan bijvoorbeeld door het houden van onderwijsleergesprekken waarin de docent de tijd neemt om door te vragen, eigen voorbeelden te laten bedenken, etc. De docent treedt dan op als meester en de leerling is zijn gezel, in de literatuur wordt wel gesproken over *cognitive apprenticeship* (de docent als voorbeeld).
Eén van die rijke contexten waarvoor wij hebben gekozen is de context ‘golven’. Motivatie is waarschijnlijk geen probleem, zie http://www.wldelft.nl/gen/news/tsunami/. Die mooie applet

uit Delft gaat over golven en over het enorme bereik van golven. Het onderwerp is levensecht waardoor de kans groter is dat het geleerde ook beklijft; in de literatuur heet dat *situated cognition* (de docent geeft hints, stelt vragen, en biedt mogelijkheden aan om een volgende stap te zetten).
Maar wat moet je nu met zo'n rijke context in de wiskundeles? Hoe kun je daar nu een model van maken? Om maar met de deur in huis te vallen: wat is een golf eigenlijk? Hoe stel je dat voor? Je kunt een golf observeren als je naar de zee kijkt, maar wat gebeurt er eigenlijk en hoe beschrijf je dat?

Iedereen (nemen we aan) heeft wel eens in een stadion, of op tv, naar wedstrijden gekeken. Vaak wordt er hard geschreeuwd om de sporters extra op te jutten. Het effect is het grootst als je rechtop gaat staan met je armen recht omhoog gericht, precies op het moment dat de sporter voorbij komt. En dan gebeurt het: er ontstaat een golf (wave) beginnend bij de start (staande mensen) en eindigend bij de finish (staande mensen).

Neem nu eens aan dat de toeschouwers gaan staan om te schreeuwen en 2 seconden later weer zitten. Als de toeschouwers op de tribune reageren op de naaste linkerbuur met een reactietijd van ½ seconde dan verplaatst de golf zich in 1 seconde 80 cm, ervan uitgaande dat de stoelen op de tribune 40 cm breed zijn en direct aansluiten. Met andere woorden, de <u>golfsnelheid</u> is 80 cm (2 stoelen) per seconde. En als elke toeschouwer op de tribune reageert op de linkerbuur van de linkerbuur, dan verdubbelt (4 stoelen per seconde) de golfsnelheid. De golf verplaatst zich meer dan 1½ meter per seconde. Als de toeschouwers ook nog eens 2 seconden blijven staan, dan is de lengte van de golf meer dan 3 meter (8 stoelen). Anders gezegd: de <u>golflengte</u> is 3.20 meter (8 stoelen), en in het voorgaande geval 1.60 meter (4 stoelen). In dit voorbeeld zien we al dat, wil je tot een model komen, er veel vragen moeten worden gesteld en veel aannames moeten worden gedaan. Ook moeten de definities helder worden: wat versta je bijvoorbeeld precies onder een golflengte?
Voortbordurend op dit kernconcept kunnen allerlei nieuwe vragen ontstaan:
Oudere mensen reageren trager, wat verandert er dan aan de golf? Kinderen reageren sneller maar blijven langer staan, wat verandert er dan? Hoe kun je aan een golf zien of mensen sneller opstaan of sneller gaan zitten (bijvoorbeeld vanaf het punt dat de handen helemaal in de hoogte zijn)? Hoe lang duurt het in het Thialf Stadion voordat de golf helemaal rond is? Gaat de golf voor mensen hoog boven in de tribune (meer stoelen) langzamer dan voor

mensen die beneden (minder stoelen) zitten? Wat gebeurt er als iemand (niet op de voorste rij) niet op zijn naaste buur, maar op diegene die schuin voor hem zit, reageert?

Deze aanpak kost tijd, maar het kernconcept krijgt langzaam maar zeker body. Een dergelijke context kan ook worden gespeeld, of via eigen verhalen bijna realiteit worden, in de literatuur aangeduid met *anchored instruction* (leerlingen worden voorzien van 'ankers'; de docent begeleidt zijn leerlingen met vragen en opmerkingen zoals: denk je dat je aanname klopt? Hoe kom je daarachter? Waarom probeer je dit idee niet eens uit?).

Abstractie, de stap naar een omschrijving waarin twee variabelen (afstand en tijd) voorkomen, komt dan niet zomaar uit de lucht vallen. Dit is een voorbeeld maar de essentie is duidelijk: denk met de leerlingen na over het kernconcept zelf. Voor docenten is dit nieuw, samen met leerlingen stellen zij zichzelf vragen en zoeken naar antwoorden, de literatuur spreekt dan over *reciprocal teaching.*
Deze andere didactiek vereist behalve lesmateriaal voor leerlingen ook materiaal voor docenten. Wij zijn van plan een uitgebreide docentenhandleiding te ontwerpen, met allerlei literatuurverwijzingen, websites met applets, en dwarsverbanden naar andere concepten.
We verwachten dat er aan het eind van dit schooljaar lesmateriaal en een bijbehorende docentenhandleiding gereed zullen zijn voor experimenteel gebruik.

Over de auteurs:
De UT-kerngroep bestaat uit vier UT-docenten:
Brenny van Groesen, groesen@math.utwente.nl
Gerard Jeurnink, g.a.m.jeurnink@utwente.nl
Norbert Ligterink, n.e.ligterink@utwente.nl
Nellie Verhoef , n.c.verhoef@utwente.nl
en zeven vwo-docenten:
Jan de Geus, j.degeus@baudartius.nl
Art Groen, artjos@home.nl
Jan Otto Kranenborg, j.o.kranenborg@hetnet.nl
Jeroen Spandaw, j.g.spandaw@xs4all.nl
Frits Spijkers, f.spijkers@math4all.nl
Gerard Stroomer, g.stroomer@liemerscollege.nl
Joke Zwarteveen, jzwarteveen@nuborgh.nl

MODELLEREN, HOE ONDERWIJS JE DAT?

Wat er terechtgekomen is van de visie op een domein in wiskunde D

[Nellie Verhoef, Gerard Jeurnink, Brenny van Groesen,]

Inleiding

Niemand kijkt vreemd op als dit artikel begint met de verzuchting dat de implementatie van onderwijsvernieuwingen, of curriculuminnovaties met een moeilijk woord, weerbarstig is. Wetenschappelijk onderzoek naar verschijningsvormen van vernieuwingen in het onderwijs bevestigt dit verlammende gevoel (Goodlad, 1994). Het ontwikkelteam van de module Modelleren, een kerngroep van UT- en vwo-docenten, had duidelijke eigen ideeën bij de module, zie Euclides maart 2007. Zij werkten deze ideeën uit, zetten die op schrift, probeerden de module uit in de lespraktijk en gingen achteraf na wat leerlingen ervan geleerd hadden, zie onderstaand schema in Tabel 1.

Tabel 1: Curriculumcomponenten

COMPONENT	**OMSCHRIJVING IN DE LESPRAKTIJK**
Rationale	Grip krijgen op de (probleem)situatie
Doel	De vaardigheid 'modelleren' eigen maken
Inhoud	(Realistische) Situaties die zich aandienen
Leeractiviteiten	(Zichzelf) Vragen stellen en abstraheren
Rol van de docent	Expert-model-coach
Materialen en bronnen	Modules en niet-wiskundige domeinen
Werkvorm	Groepswerk, maximaal 4 personen
Werkplek	Projectruimte en thuis
Tijdstip	School en thuis
Toetsing	Presentaties

Bron: Akker, J. van den, Hameyer, U., & Kuiper, W. (Eds.) (2003). Curriculum landscapes and trends.

Het liep in de praktijk echter anders. En dat verbaast niet, getuige de triple van verschijningsvormen bij onderwijsvernieuwingen, Tabel 2.

Tabel 2: Verschijningsvormen van een curriculumvernieuwing

VERSCHIJNINGSVORM	**OMSCHRIJVING**

BEOOGD	***Ideaal***	Visie die ten grondslag ligt aan het curriculum
	Formeel/ Geschreven	Intenties die terug te vinden zijn in curriculumdocumenten en materialen
GEÏMPLEMENTEERD	***Opgevat***	Curriculum zoals dat is geïnterpreteerd door gebruikers (docenten)
	Operationeel	Gerealiseerd proces van leren en onderwijzen (ook: curriculum-in-actie)
BEREIKT	***Ervaren***	Leerervaringen in de ogen van leerlingen
	Geleerd	Leerresultaten van leerlingen

Bron: Akker, J. van den, Hameyer, U., & Kuiper, W. (Eds.) (2003). Curriculum landscapes and trends.

Het verloop van de curriculumvernieuwing met de Twentse module Modelleren wordt hierna beschreven aan de hand van bovenstaand schema.

De beoogde verschijningsvorm van de module

Modelleren is een lastig onderdeel, omdat je niet goed kunt voorspellen hoe lessen en leerprocessen van leerlingen zullen verlopen. De fases die het modelleren van een (realistische) situatie typeren laten heel wat ruimte toe voor verschillende oplossingswegen en keuzevariabelen. De doelen van de module Modelleren gaan over het eigen maken van de vaardigheid modellleren. Dat betekent dat leerlingen leren in (realistische) situaties te selecteren, te vereenvoudigen, en bekende wiskundige kennis en vaardigheden (technieken) toe te passen. Leerlingen leren zichzelf de juiste vragen te stellen. In operationele termen ligt de nadruk op het kunnen vertalen naar gekwantificeerde grootheden die de schakels vormen tussen werkelijkheid en model. De keuze van die grootheden is doorslaggevend voor de daaropvolgende wiskundige activiteiten. Het onderwijzen van deze vorm van leren (de didactiek) is anders dan gebruikelijk, en daarom voor docenten spannend en ongewis.
Concreet zullen leerlingen, uitgaande van een onderzoekende houding zich een voorstelling moeten kunnen maken van het verschijnsel in de werkelijkheid (1), die voorstelling vertalen naar meetbare grootheden (2), en naar relaties daartussen (3), om die met wiskundige technieken te bewerken (4), en te interpreteren in de oorspronkelijke werkelijkheid (5). Voor de leerling geeft deze aanpak een duidelijk inzicht in het interpreteren van de eventuele oplossing.

Hoe kunnen docenten dit proces sturen?

Idealiter vervult de docent de rol van *expert*, *model* en *coach*. De docent is *expert* omdat hij de wiskundige theorie gedegen beheerst en als 'meester-gezel' op zijn leerlingen overdraagt. Als *model* laat de docent – door voor te doen – zien hoe je wiskundige technieken toepast en hoe je verbanden legt met bestaande kennis en vaardigheden. Hij laat bijvoorbeeld zien hoe je een verschijnsel in de werkelijkheid zou kunnen beschrijven met wiskundige termen, hoe je verbindende relaties wiskundig vertaalt en hoe je problemen die zich voordoen oplost. Als *coach* zet hij leerlingen aan het nadenken met opmerkingen als: waarom geef je het op? Denk je dat je aanname klopt? Hoe kom je daarachter? Wat kan helpen om het probleem op te lossen? Wat moet je weten voordat je verder kunt? Waarom probeer je dit idee niet uit? In alle gevallen is de docent erop gericht zichzelf zo snel mogelijk overbodig te maken zodat de leerling zelfstandig verder kan werken.

De geïmplementeerde verschijningsvorm van de module

In de UT-kerngroep is ervoor gekozen het lesmateriaal te verdelen in materiaal voor leerlingen en achtergrondmateriaal voor docenten. Het enige verschil is dat het docentenmateriaal extra informatie bevat: uitwerkingen van opdrachten, hints en tips voor leerlingen, en verdiepingsstof voor de docent zelf. Het leerlingenmateriaal begint met een startmodule (www.wiskundesteun.nl linken naar Twente), een soort eerste voorbeeldmodule (20 slu) om in een eenvoudige situatie te ervaren hoe het proces van het modelleren verloopt. Op de startmodule volgen nog andere modules: Wave en golven, Golven en tsunami's, en Verkeer en files. De afsluiting van de modules vindt plaats door presentaties van leerlingen in aanwezigheid van UT-mederwerkers. De verwachting was dat de aansluiting daarmee ingebed zou zijn.

De beschrijving in dit artikel gaat over eerste praktijkervaringen met de startmodule bij docenten Xandra Snoeker op het Stedelijk Daltoncollege in Zutphen en Gerard Stroomer op het Liemerscollege in Zevenaar.
Vanwege de formulering van de eerste vraag in de startmodule over de kijkafstand gaan de leerlingen ervan uit dat er een exact antwoord gegeven moet worden.

Kijkafstand

Iemand staat op een vlot midden op een rustige (vlakke) zee. Hoe ver kan hij kijken?

Opgave 1
Probeer zelf een oplossing te verzinnen.

Maar, hoe kan dat nu als er geen getallen zijn om mee te rekenen *(kiezen van gekwantificeerde grootheden)*? De aanwijzing van de docent (coach) om eerst eens een schets van de situatie te maken, helpt. Al snel wordt er een cirkel getekend die de aarde moet voorstellen, met een mannetje dat staat te kijken en een kijklijn die raakt aan de cirkel *(wiskundige activiteit).* Een groepje leerlingen gaat op zoek naar een aardbol in het aardrijkskundelokaal en neemt die erbij om zich voor te stellen wat er aan de hand is. Hoe nu verder *(probleem)*?
Tijd voor de volgende aanwijzingen van de docent (expert): kun je een driehoek tekenen? En welke eigenschappen heeft deze driehoek? Nu komen de leerlingen op bekend terrein: een rechthoekige driehoek, twee bekende afstanden: de straal van de aarde en de lengte van de persoon die kijkt, de stelling van Pythagoras *(parate kennis over de stelling van Pythagoras gebruiken).*
Natuurlijk gebruikt elk groepje andere notaties. Om daarin eenheid te brengen zet de docent (expert) de situatie nog eens uiteen op het bord en voorziet de verschillende afstanden van een letter. Hij doet voor (model) hoe de straal van de aarde berekend kan worden als je de omtrek van de evenaar weet *(koppelingen tussen verschillende kennisgebieden).*.. en het eerste model staat op het bord.
Wat is nu de variabele in dit model: de lengte van degene die kijkt. Er komt een formule op het bord en het is gemakkelijk te onderzoeken hoe de lengte van de persoon de kijkafstand beïnvloedt *(parate kennis over het oplossen van vergelijkingen).* Dan stelt de docent (model) de vraag of dit model ook bruikbaar is op een andere planeet? Ja, dat kan volgens de leerlingen, als je voor de straal een ander getal invult. De straal is een voorbeeld van een parameter *(wiskundige activiteit)*. Tenslotte besteedt de docent (expert) aandacht aan het feit dat de lengte van degene die kijkt verwaarloosbaar klein is ten opzichte van de straal van de aarde. Het model wordt nog wat vereenvoudigd *(wiskundige activiteit).*
Een volgende vraag gaat over een zwemmer in nood.

Zwemmer in nood

Iemand staat op het strand aan de waterlijn. Schuin voor zich ziet hij een zwemmer in nood. Hoe kan hij zo snel mogelijk bij de zwemmer komen om hulp te bieden? Springt hij meteen in het water of loopt hij eerst een stuk langs het strand?

Opgave 5
Probeer zelf een oplossing te verzinnen.

Onmiddellijk wordt het antwoord berekend en en passant door aan aantal groepjes geconstateerd dat de verhouding tussen loop- en zwemsnelheid bepalend is voor wat je moet doen. Dit is slim bedacht, maar is alleen waar voor bepaalde combinaties van getallen (expert). Dus toch maar eens formules opstellen met behulp van Pythagoras en gebruik van de relatie *t*= afstand/snelheid, om daarna pas getallen in te vullen *(gekwantificeerde grootheden)*. Dan komt de vraag: hoe bepaal je nu het minimum van *t* *(wiskundig probleem)*? In eerste instantie hebben de leerlingen geen idee *(ontbreken van parate kennis)*. Als de docent (coach) suggereert dat de leerlingen misschien de GR kunnen gebruiken, realiseren ze zich dat wiskunde B – kennis hier toegepast kan worden. De formule wordt ingevoerd en geplot. Dan kan het maximum bepaald worden *(wiskundige activiteit)*. Daar komt iets onverwachts uit *(probleem)*. Enig speurwerk leert dat de afstanden in meters zijn ingevuld en de snelheden in km/uur. Een goede aanleiding om het met de leerlingen te hebben (expert) over dimensies en dat je in een model altijd moet controleren of die kloppen!
Als laatste is het griepmodel aan de beurt.

Griepepidemie

Griep is een besmettelijke ziekte die van mens tot mens wordt overgedragen. Als de griep opduikt is er sprake van gezonde mensen, zieke mensen en mensen die ziek zijn geweest maar beter zijn geworden. Alleen zieke mensen steken gezonde mensen aan. De gemiddelde ziekteduur is 4 dagen, daarna ben je geruime tijd immuun geworden. Je begint op een bepaalde dag met 100.000 personen waarvan er 100 ziek en 500 immuun zijn. Hoe verloopt het aantal zieken per dag, hoeveel is dit maximaal?
(Zie ook www.degrotegriepmeting.nl)

Opgave 11
Probeer zelf een model voor het ziekteverloop te verzinnen.
Schakel eventueel de computer en het rekenblad Excel in.

Daarvoor kunnen de leerlingen niet in één keer een oplossing vinden omdat het gaat om een proces dat zich afspeelt in de tijd en de variabelen afhankelijk van elkaar veranderen. Een heel ander soort probleem dus. Je kunt wel formules opstellen en die kwalitatief bekijken. Gebeurt er globaal wat je verwacht? Wat moet je in het model veranderen om te zorgen dat dat wel gebeurt *(kiezen van gekwantificeerde grootheden)*? De leerlingen hebben moeite dit zelf te verzinnen *(probleem met interpreteren in de werkelijkheid)*. De docent (model) laat de leerlingen op het bord zien hoe ze dit probleem kunnen aanpakken.
Na het stoeien met de drie modellen is het tijd om het over de modelleercyclus te hebben (expert). Dat blijkt lang niet zo interessant te zijn als het opstellen van de modellen. Het is wellicht te abstract? Het huiswerk waarin gevraagd wordt om eens terug te kijken en te benoemen wat er is gedaan tot nu toe wordt slecht of niet gemaakt *(motivatieprobleem)*.
Na een klassikale evaluatie van de drie modellen en de modelleercyclus krijgen de leerlingen de opdracht om te kiezen uit een aantal contexten en daar een model bij te maken. In het vooruitzicht wordt gesteld: een bezoek aan de UT met presentaties van hun ontworpen modellen!

De bereikte verschijningsvorm van de module

Het bezoek begint met een college – opgeluisterd met fotomateriaal en animaties – over tsunami's, hoe die ontstaan en wat de verwoestende gevolgen kunnen zijn (wiskundig gemodelleerd in de vervolgmodule Golven en tsunami's). Er worden verbanden gelegd met geofysica en theoretische natuurkunde. Een computerpracticum hierover volgt, in één van de pc-zalen van de universiteit. Voor de leerlingen is dat wel even wennen om in je eentje op een chique stoel met wieltjes achter een computer te zitten. Het bezoek aan de universiteit wordt na een lunch afgesloten met de leerlingpresentaties (zie foto), en een rondleiding over de UT-campus.

De leerlingen krijgen 10 minuten de tijd om te laten zien wat ze hebben onderzocht en tot welke resultaten dat leidde. Elke presentatie eindigt met 5 minuten van vraag-en-antwoord. Onder het gehoor zijn medewerkers van de afdeling Toegepaste Wiskunde en van de Lerarenopleiding ELAN aanwezig. Bij de beoordeling wordt speciaal gelet op: de helderheid van het betoog, de keuze van de gekwantificeerde grootheden, de wiskundige activiteiten, de resultaten van

het model in werkelijkheid, de presentatie, en de discussie naar aanleiding van de presentatie. De presentaties van de leerlingen gaan over:
- inblikken, de minimale vorm/afmetingen van een blik met inhoud van 1 liter;
- slingertijd, een formule die de slingertijd van een slinger beschrijft;
- brandstof, kiezen voor het autorijden op benzine, diesel of gas;
- straatverlichting, optimaliseren van de verhouding tussen kosten en verlichting.

Voor de leerlingen was het spannend om op een universiteit een presentatie te verzorgen. Op vragenlijsten achteraf reageerden de leerlingen als volgt:
- de inleiding over tsunami's was interessant (waardering: 7);
- het computerpracticum was wel leuk, maar voor veel leerlingen iets te gemakkelijk (waardering: 7,5);
- het presenteren was leuk en spannend, de aanwezigheid van medewerkers van de UT voegt echt iets toe, 10 minuten per presentatie is te weinig (waardering: 7,5);
- de dag als geheel is voor herhaling vatbaar (waardering 7,3);
- het contact met de studenten, met name tijdens de lunch, werd zeer op prijs gesteld; volgend jaar graag weer!

De implementatie van deze eerste module leverde voor de vo-docenten een gevoel op van 'zó, kan het ook!', en 'hier gebruik je dus wiskundige kennis en vaardigheden'. Het voelde als een verademing om niet in het keurslijf van alledag te opereren. Het blijft spannend, maar ook uitdagend. Voor UT-medewerkers was het een eye-opener om te zien en te ervaren hoe leerlingen met het modelleren bezig zijn, welke problemen ze ervaren, welke kennis ze paraat hebben, en welke kennis ze niet hebben.
Een stukje tekst naar aanleiding van deze ervaringen in de laatste schoolkrant van het jaar maakt duidelijk dat de bereikte doelen te maken hebben met enthousiasme (van docenten en hun leerlingen) voor het vak wiskunde, met name als het over modelleren gaat, in combinatie met een werkbezoek aan de Universiteit Twente.

Met dank aan:
Xandra Snoeker, het Stedelijk Daltoncollege Zutphen en Gerard Stroomer, Liemerscollege Zevenaar.

Over de auteurs

Prof. dr. Brenny van Groesen is als hoogleraar Toegepaste Analyse en Mathematische Fysica betrokken bij Wiskunde D, dr. Gerard Jeurnink is coördinator van het steunpunt Wiskunde D en dr. Nellie Verhoef is vakdidacticus wiskunde (ELAN). Allen zijn verbonden aan de Universiteit Twente.

Referentie

Akker, J. van den, Hameyer, U., & Kuiper, W. (Eds.) (2003). *Curriculum landscapes and trends.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Goodlad, J.I. (1993). The national Network of Eduacional Renawal. In: *Phi Delta Kappan, Vol. 75*, 8 (7) (pp. 632-638).

Wiskunde in wetenschap

vwo D

Modelleren

Startmodule wiskundig modelleren

1. Modelleren, wat is dat?
2. Modelleercyclus
3. Jezelf vragen leren stellen
4. Enkele modelsituaties

Bijlage: Mogelijke hulpvragen bij modelleren universiteit Twente

Deze startmodule is de eerste van een serie modules die vooralsnog bestaat uit:
- Startmodule: Modelleren
- Wave en golven
- Golven en tsunami
- Verkeer en files
- Krommen en knikken

Het Excel-bestand dat is gebruikt bij het model “Griepepidemie” is te downloaden vanaf de website van het wiskunde D steunpunt van de UTwente.
Een spreadsheet-programma zoals Excel is bij uitstek geschikt om modellen door te rekenen. Practica om het werken met Excel te leren zijn te vinden op www.math4all.nl > Practica > Werken met Excel.

Versie: januari 2008

Inleiding voor de docent

Wat is wetenschapsbeoefening, welke rol speelt wiskunde hierin, en wat betekent dat voor het onderwijs in de bovenbouw van het VWO?
Geïnspireerd door een oproep van de vernieuwingscommissie cTWO gericht aan het adres van het wetenschappelijk onderwijs, wordt er aan de Universiteit Twente een leerstofdomein 'Wiskunde in Wetenschap' ontwikkeld door een kerngroep van UT- en vwo- docenten. Dit lesmateriaal is bedoeld voor het nieuwe vak Wiskunde D, maar (deels) ook voor Natuur, Leven en Technologie (NLT). Het wil aan de hand van uitdagende cases de leerlingen laten ervaren dat het proces van (wiskundig) modelleren problemen doet begrijpen en ze toegankelijk maakt voor oplossingen.
Deze startmodule heeft tot doel de leerlingen op dit proces voor te bereiden.

Wetenschap

Wetenschap, bedreven vanuit nieuwsgierigheid of doelgerichtheid, stelt zichzelf vragen om (natuur)verschijnselen te kunnen begrijpen. Om het denken richting te geven en om van gedachten te wisselen is een 'taal' vereist waarin begrippen worden ontwikkeld. Deze begrippen beschrijven de meest in het oog lopende aspecten van het verschijnsel. Zij dienen zo precies mogelijk geformuleerd te worden en moeten eenduidig zijn. Er worden niet alleen begrippen, maar ook relaties tussen die begrippen gezocht; juist daardoor ontstaat inzicht in het probleem. Of het leidt tot de noodzaak meer begrippen in te voeren en/of andere relaties te onderzoeken. Al doende gaan we meer 'begrijpen' van het verschijnsel. Dit geheel van begrippen en relaties is een bouwwerk dat een 'model' is van het te onderzoeken probleemgebied.
Omgekeerd, bij het denken of communiceren over welk onderwerp dan ook gebruiken we een (al dan niet expliciet gemaakt) achterliggend model. Als verschillende mensen onbewust verschillende modellen gebruiken kan dat gemakkelijk aanleiding geven tot misverstanden of onbegrip. Bijvoorbeeld: algemene uitspraken over economie, gezondheid etc. hangen voornamelijk af van welk aspect men daarvan wil benadrukken. Juist als daarvoor gekwantificeerde grootheden worden gebruikt (winst van bedrijven, aantal werklozen, cholesterolgehalte, etc.) moet het belang daarvan worden onderkend. De keuze van de beschouwde grootheden kan de discussie over de resultaten van het model verhelderen.
Voorbeelden uit het dagelijkse leven zoals hierboven gegeven kunnen leerlingen het belang illustreren van het expliciet maken van het gebruikte model. Het valt daarbij op te merken dat bovenstaande geldt voor alle wetenschappen, van natuurwetenschappen tot geestes- en sociale wetenschappen. Bovendien moet benadrukt worden dat alleen 'logisch redeneren' (meestal stilzwijgend) geaccepteerd is als methode om uit gekozen begrippen/grootheden en daarvan afgeleide (of aangenomen) relaties conclusies te trekken. De inductieve manier van redeneren wordt vaak toegepast bij het opstellen van een model, waarbij het logisch redeneren slechts ten dele aan de orde is. Er spelen nogal eens voorkeuren, ingeslepen (voor)oordelen en toevalligheden, mee. Van belang wordt dan de terugkoppeling van meetresultaten of uitkomsten van berekeningen naar de werkelijkheid.

Wiskunde

In het voorafgaande is betoogd dat het exact formuleren van begrippen en relaties tot een model leidt dat het denkkader gaat vormen waarmee via logisch redeneren kennis wordt ontwikkeld over het te onderzoeken probleemgebied. Met al deze activiteiten wordt in veel gevallen wel wat slordig omgesprongen, maar dit erkent in principe de nauwkeurige werkwijze van de wiskunde als ideaaltypisch voorbeeld. Dit is op zich al voldoende reden om modelleren te zien als een (toegepast) wiskundige activiteit.
Meer klassiek gesproken, en niet minder belangrijk maar wel meer vertrouwd, komt de wiskunde in beeld zodra de boven beschreven structuur geformaliseerd wordt en wiskundige technieken worden gebruikt voor nader onderzoek. In bijvoorbeeld de sociologie worden intermenselijke relaties gerepresenteerd als ‘grafen’ en in bijvoorbeeld natuurkunde wordt het begrip ‘afgeleide’ als maat voor verandering geïntroduceerd. In het vertalen van begrippen naar meetbare grootheden (buren in een graaf, snelheid bij verplaatsing) bedrijft men ook wiskunde. Relaties geven uitdrukking aan ordening of aan een functioneel verband (dat kan een ongelijkheid zijn, een algebraïsche vergelijking, een differentiaalvergelijking, etc.). Het geheel van gekozen grootheden en opgestelde relaties vormt het wiskundige model van de (benadering van de) werkelijkheid. Dit modelleerproces kan op elk niveau, afhankelijk van het leerjaar, gestalte krijgen. De concretisering van het abstractieniveau, en het manipuleren met parameters zijn daarbij bepalend. In hoeverre het model de werkelijkheid benadert is afhankelijk van de selectie van grootheden en relaties. Een complexer model zal meer wiskunde achtergrond vereisen, zowel voor het formuleren van het model, de analyse van het model, als ook voor de interpretatie van het resultaat van het onderzoek in het model.

Modules

Het domein Wiskunde in Wetenschap heeft binnen Wiskunde D (vwo) een studielast van 80 uren. Wij werken eraan om dit domein te laten bestaan uit modules die in opeenvolgende leerjaren kunnen worden ingezet. Tevens is het studiemateriaal (deels) inzetbaar bij het vak NLT. Eén module staat bij ons voor ongeveer 20 studielasturen. De kerngroep werkt aan verschillende modules die in combinatie het domein Wiskunde in Wetenschap kunnen opvullen (ook aan andere universiteiten worden modules Wiskunde in Wetenschap ontwikkeld).
Deze algemene inleidende module ‘Modelleren’ bestaat vooral uit eenvoudige voorbeelden uit diverse wetenschapsgebieden en is al in de loop van 4vwo te gebruiken. We willen ernaar streven dat deze module ook aantrekkelijk zal zijn voor leerlingen van andere dan het N&T-profiel.
Daarnaast komen er modules met een bepaald thema (verkeer, de wave, tsunami’s, resonantie) voor klas 5 en 6 waaraan een onderzoeksopdracht (aan de universiteit of eventueel op afstand) kan worden gekoppeld. De door de kerngroep ontwikkelde modules bestaan uit leerlingenmateriaal en docentenmateriaal.

Didactiek

Bij dit type leren hoort een daaraan aangepaste didactiek en een andere rol van de docent. De module zoals wij die voor ogen hebben is niet vergelijkbaar met een hoofdstuk uit één van de gebruikelijke wiskundemethodes. We gaan uit van één rijke context, en willen het denken van leerlingen stimuleren door een tijdlang niet van deze ene context af te wijken. Het leerproces wordt dan niet zozeer gestuurd door de opgaven, maar door vragen die leerlingen zèlf stellen. Dat gaat niet vanzelf, omdat leerlingen niet gewend zijn op deze manier met wiskunde bezig te zijn. Om dit aan te leren worden in het begin hulpvragen gebruikt en voorbeelden van een mogelijke aanpak doorgelopen. Dat zijn echter meestal vragen aan de hand waarvan een (groepje) leerling(en) eigen antwoorden, oplossingen bedenkt en formuleert. Pasklare antwoorden zijn niet echt te geven. Deze vragen kunnen ook dienen als richtsnoer voor onderwijsleergesprekken waarin de docent de tijd neemt om door te vragen, eigen voorbeelden te laten bedenken, etc. De docent treedt dan op als meester en de leerling is zijn gezel, in de literatuur wordt wel gesproken over *cognitive apprenticeship* (de docent als voorbeeld).
Deze aanpak kost tijd, maar het kernconcept krijgt langzaam maar zeker body. Een dergelijke context kan ook worden gespeeld, of via eigen verhalen bijna realiteit worden, in de literatuur aangeduid met *anchored instruction* (leerlingen worden voorzien van 'ankers'; de docent begeleidt zijn leerlingen met vragen en opmerkingen zoals: denk je dat je aanname klopt? Hoe kom je daarachter? Waarom probeer je dit idee niet eens uit?).

Abstractie, de stap naar een omschrijving waarin meerdere variabelen voorkomen, komt dan niet zomaar uit de lucht vallen. De essentie is duidelijk: denk met de leerlingen na over het kernconcept zelf. Voor docenten is dit nieuw, samen met leerlingen stellen zij zichzelf vragen en zoeken naar antwoorden, de literatuur spreekt dan over *reciprocal teaching*.

Opbouw van deze module

Deze module "Modelleren" is bedoeld als inleiding op het onderwerp 'wiskundig modelleren'. Vanaf het begin is het uitgangspunt dat de leerlingen worden geconfronteerd met open situaties, waarin ze eerst zelf hun weg moeten zien te vinden. Omdat dit voor veel leerlingen betrekkelijk nieuw is, zijn de situaties die ze krijgen voorgeschoteld nog niet erg complex. De noodzakelijke voorkennis beperkt zich tot de wiskunde uit de onderbouw en het kunnen werken met een grafische rekenmachine of een grafiekenprogramma op de PC. Hoewel in sommige opgaven het differentiëren zou kunnen worden toegepast is dit niet noodzakelijk. Daarom kan deze module al in het vierde leerjaar worden ingezet. Door reflectie op hun handelen onder leiding van een docent wordt geprobeerd om in kaart te brengen wat er bij modelleren aan de hand is. De modelleercyclus is bedoeld om richting te geven aan het handelen bij de vaardigheid "modelleren". Omdat het kunnen zetten van stappen in deze cyclus is gebaseerd op het jezelf vragen durven stellen is ook aan dat aspect aandacht geschonken.

De opbouw van de module is als volgt:

1. **Modelleren, wat is dat? (2 à 3 lesuren)**
   Het is de bedoeling dat de leerlingen een tweetal lesuren (of misschien drie, dat moet uit de praktijk blijken) werken aan problemen die uitnodigen tot modelleren. Werken in kleine groepen (tweetallen, drietallen) bevorderen het expliciteren van denkstappen en helpen hulpeloosheid te ondervangen. Het is de bedoeling dat ze eerst zelf met het probleem stoeien en pas daarna de hulpvragen gebruiken. Die hulpvragen zijn ook nuttig als de leerlingen zelf het probleem kunnen oplossen, want ze geven in paragraaf 2 aanleiding tot een blik op het proces van modelleren. Wel kunnen ze dan wat sneller worden doorlopen.
   Rol van de docent:
   - de leerlingen vertellen dat het om het proces van modelleren gaat, dat het niet gaat om een eenduidig eindantwoord;
   - de leerlingen vertellen dat het niet abnormaal is als ze er niet meteen uitkomen, maar dat ze zich wel de tijd moeten gunnen om dat te doen;
   - niet teveel helpen, zeker niet gaan uitleggen (met de hulpvragen in de tekst zou het zelfstandig moeten lukken).

2. **De modelleercyclus (2 à 3 lesuren)**
   De modelleercyclus beschrijft welke stappen er in elk modelleerproces worden gezet. Het is nuttig om je telkens bewust te zijn van de fase waarin je bezig bent bij het modelleren. Dat is ook leerlingen wel aan te leren, maar alleen in situaties die weliswaar voldoende rijk zijn om alle stappen in te herkennen en kunnen benoemen, maar die ook eenvoudig genoeg zijn om nog door beginners te kunnen worden gehanteerd.
   We verwachten dat de situaties vanuit de eerste paragraaf daaraan voldoen en we gebruiken die situaties dan ook om door middel van reflectie op de gekozen aanpak de stappen van de modelleercyclus duidelijk te maken. Om richting te geven aan die reflectie staan er in deze opdrachten wat vragen geformuleerd. Maar het is zeker niet nodig om je als docent aan die vragen en die volgorde te houden; dit zal sterk afhangen van de gekozen werkvorm:
   - bij een onderwijsleergesprek heb je als docent de regie en laat je het van de groep afhangen welke vragen en aanwijzingen er voorbij komen;
   - bij uitwisseling binnen groepen heb je als docent wellicht toch dergelijke hulpvragen nodig en/of geef je er zelf nog een paar extra mee.
   En niet voor niets is zowel de leerlingentekst als de docentenhandleiding in "Word"-formaat: haal rustig vragen weg, pas ze aan en voeg andere vragen toe, afhankelijk van je eigen voorkeur als docent.
   Deze opdrachten beschouwen we als een belangrijke stap bij het aanleren van modelleervaardigheden, er moet zeker een les voor worden uitgetrokken. Wel is het van belang de leerlingen mee te geven dat het gaat om het herkennen van de stappen in de cyclus, en welke activiteiten er (per modelleersituatie) bij horen, maar nog niet om het opschrijven van een goed leesbare uitwerking. (Dat komt in de volgende paragraaf aan de orde.)
   Enkele begrippen die bij modelleren een rol zijn in de tekst en in een aantal opgaven vet gedrukt.
   Aan het einde van deze paragraaf worden er een paar nieuwe (kleine) modelleersituaties beschreven. Met de kennis van de modelleercyclus in het achterhoofd verwachten we dat leerlingen nu een meer gestructureerde

aanpak kunnen kiezen.

3. **Jezelf vragen leren stellen (2 à 3 lesuren)**
Het kennen van de stappen in de modelleercyclus is nuttig om te weten waar je zit in het modelleerproces. Maar om stappen te kunnen zetten moet je jezelf goede vragen leren stellen. Daar is helaas geen panklaar recept voor, maar een lijst met mogelijke hulpvragen is in het leerlingenmateriaal opgenomen, misschien geeft die wat houvast…
Om te leren omgaan met dergelijke hulpvragen beginnen we met een situatie waarin deze vragen expliciet aan de orde komen. Daarna worden er weer een aantal kleinere nieuwe modelleersituaties voorgelegd. Nu kunnen er ook verder gaande eisen aan de uitwerking worden gesteld.

4. **Enkele modelsituaties (3 à 5 lesuren)**
Het is nu de bedoeling dat de leerlingen (in kleine groepen) minstens één van deze modelsituaties volledig uitwerken. We vragen de leerlingen nu een **leesbare uitwerking** te schrijven. Daarmee bedoelen we een uitwerking waarin de stappen van de modelleercyclus herkenbaar worden gevolgd en waarin de hulpvragen met hun antwoorden en aannamen duidelijk maken hoe het modelleerproces is verlopen. Dat wordt dan hun **eindresultaat** van deze inleidende module. Het zou kunnen worden gezien als een wat kleinere praktische opdracht.

Deze globale opzet betekent een totale tijdsduur van 9 tot 12 (of zelfs 15) lesuren, sterk afhankelijk van de door de docent gelegde accenten. De docent is steeds als expert op de achtergrond aanwezig en stelt meer of minder richtinggevende vragen (daarbij telkens aangevend dat de leerlingen dit zelf moeten leren doen). In de tweede en de derde paragraaf zal hij zelf de regie in handen moeten nemen en een passende aanpak vinden voor de opdrachten waarin de structuur van het modelleerproces centraal staat. In hoeverre er ruimte is voor een uitputtende bespreking van de resultaten van opdrachten, anders dan het tonen van voorbeelduitwerkingen, is ter beoordeling van de docent. Denkbaar is dat de school in een samenwerkingsverband zo'n aansluiting combineert met het bezoek aan een universiteit.

1. Modelleren, wat is dat?

Wetenschap wordt gemaakt door nieuwsgierige mensen die om zich heen kijken en zich dan vragen stellen over wat ze waarnemen. Nu is de werkelijkheid bijna altijd bijzonder ingewikkeld, te ingewikkeld om met alle details rekening te kunnen houden. En dus houd je met (in jouw ogen) onbelangrijke details ook gewoon geen rekening. Zodra je iets waarneemt vereenvoudig je (waarschijnlijk onbewust) de werkelijke situatie.

Een **model** is een vereenvoudiging van de werkelijkheid waarin nog alle eigenschappen zijn terug te vinden die belangrijk zijn voor de beschrijving van een bepaald verschijnsel dat je wilt verklaren. Het bewust opstellen van zo'n model noem je **modelleren**.

Deze eerste module uit de serie "Wiskunde in wetenschap" is bedoeld om je een idee te geven van het proces van modelleren. Met echte meer grootschalige modellen kun je in vervolgmodules kennismaken.

Kijkafstand

Iemand staat op een vlot midden op een rustige (vlakke) zee. Hoe ver kan hij kijken?

Opgave 1
Probeer zelf een oplossing te verzinnen.

In de volgende opgaven word je aan de hand van hulpvragen naar de oplossing geleid.

Opgave 2
a) Waarom kan hij niet oneindig ver kijken ook als er geen obstakels in de weg staan?
b) Maak een schets van de situatie. Houd daarbij rekening met de vorm van het aardoppervlak.
c) Hoe heb je in je figuur de afstand die hij kan kijken aangegeven?
d) Welke vereenvoudigingen heb je nu al toegepast?
Waarschijnlijk bestaat je figuur uit een (deel van een) cirkel die een doorsnede van het aardoppervlak voorstelt met daarop een lijnstukje dat de persoon die kijkt voorstelt. Als dat niet zo is, maak dan alsnog een dergelijke figuur.
Noem het middelpunt van de cirkel M en het lijnstuk (dat degene die kijkt voorstelt) PQ, met Q op het aardoppervlak.
e) Waarom moet PQ liggen op het verlengde van MQ?
f) Punt R is een punt op het aardoppervlak dat de persoon die kijkt nog net kan zien. Geef zo'n punt in je figuur aan.
g) Welke eigenschap heeft driehoek MPR? Probeer daar een verklaring voor te vinden.
h) De omtrek van de aarde is 40.000 km. Van welke lijnstukken kun je nu de lengte berekenen?

Opgave 3
Iemand doet nu het volgende voorstel om het probleem op te lossen:
Kies voor de lengte van *PQ* (de lengte van de persoon die kijkt) een bepaalde waarde, bijvoorbeeld 1,80 m.
Verder is de kijkafstand *PR* en die geef je de letter *a*.
Vervolgens pas je de stelling van Pythagoras toe in driehoek *MPR*.

a) Je kunt daarmee *a* uitrekenen. Doe dat.
b) De lengte van de persoon die kijkt hoeft niet 1,80 m te zijn. Hoe kun je daarmee rekening houden?
c) Probeer nu een volledige oplossing van het probleem te beschrijven. Je kunt daarbij werken met variabelen en een formule.
Maar je kunt ook werken met de computer en een rekenblad als Excel.

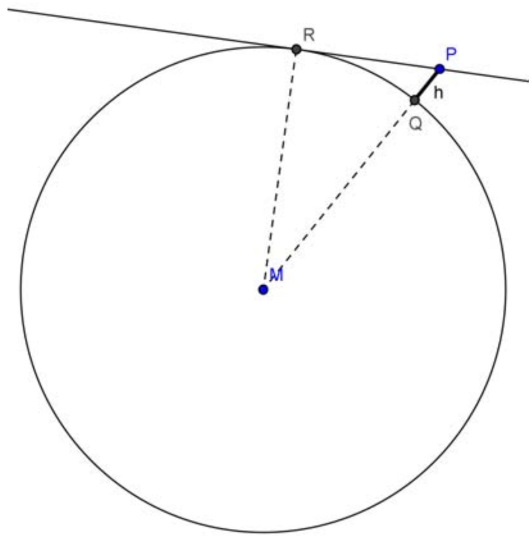
Opgave 4
Iemand anders doet een iets ander voorstel:
Kies voor de lengte van *PQ* (de lengte van de persoon die kijkt) de variabele *h*.
Verder is de kijkafstand de lengte van de boog *QR* en die geef je de letter *a*.
De lengte van die boog wordt bepaald door de grootte van hoek *QMR*. En die kun je uitrekenen in driehoek *MPR*.

a) Beschrijf nu hoe je *a* kunt berekenen.
Maak er eventueel een rekenblad in Excel voor.
b) Waarom is nu het probleem opgelost?
c) Welke van beide modellen (zie opgaven 3 en 4) vind je het beste?

Uitwerking "Kijkafstand"
(opgaven 1 t/m 4)

- **Aanpak**
  Het idee is dat leerlingen bedenken dat de aarde een bol is (eerste aanname) waarvan ze de straal vanuit de bekende omtrek kunnen berekenen. Als je dan aan de kustlijn staat (alweer een aanname) is de zee eigenlijk een bolsegment. De kijkafstand wordt bepaald door een raaklijn vanuit je oog aan de grootcirkel die de dwarsdoorsnede van de aarde voorstelt.
  Een belangrijke keuze is of die afstand wordt voorgesteld door de lengte van het lijnstuk vanuit je oog tot het raakpunt dan wel door de lengte van de cirkelboog vanaf je voeten tot aan het raakpunt. Beide zullen niet veel van elkaar verschillen, maar geven een iets andere uitwerking.
  Mogelijke hulpvragen die je als docent kunt stellen:
  - Kun je de situatie schetsen?
  - Wat betekent de schets?
  - Wat zijn de variabelen en wat zijn de verbanden daartussen?
  - Welke hulpmiddelen heb je allemaal bij meetkundige berekeningen?
  Voorkennis: de omtrek van de aarde is 40.000 km. (Vroeger was de meter gedefinieerd als het 1/40.000.000ste deel van de aardomtrek. Tegenwoordig is er een andere definitie van de meter. De aardomtrek is afhankelijk van waarlangs je meet. Langs de evenaar is die omtrek ongeveer 40.075 km.)
- **Tijd**
  Deze opdracht kost minstens 20 minuten tijd, maar wellicht veel meer als het basisidee van het gebruik van de rechthoekige driehoek raaklijn (oog – raakpunt), straal aarde, afstand middelpunt tot oog niet snel wordt herkend.

- **Uitwerking**



Stap 1:
We willen berekenen hoe ver we kunnen kijken op een volkomen kale vlakte zonder oneffenheden op het aardoppervlak.
We vragen ons eerst af wat die kijkafstand nu precies is.
Die kijkafstand is:
- mogelijkheid A: de afstand van het oog van de kijker tot de horizon;
- mogelijkheid B: de vanaf de voeten van de kijker tot de horizon, gerekend over het aardoppervlak.

Aannames:
- de aarde is een zuivere bol;
- de horizon bevindt zich in het raakpunt van de lijn vanuit je oog die raakt aan de aardbol;
- je kunt kijken tot aan het raakpunt.

Stap 2:
We vragen ons af welke variabelen er zijn.
We komen tot twee variabelen: h is de hoogte van je oog boven de grond en a is de gevraagde kijkafstand. (Afhankelijk van mogelijkheid A of B is dat de lengte van PR of de lengte van de cirkelboog QR.)
Vervolgens vragen we ons af welke afmetingen de aarde heeft en hoe we die in de figuur kunnen aangeven.
De omtrek van de aarde is 40.000 km, dus de straal is $40000/2\pi$ km. Die is vanuit het middelpunt gerekend, dus dat middelpunt speelt een rol in de oplossing.
Dan stellen we ons de vraag welke eenheden bruikbaar zijn: m (menselijke maat) of km (maat geschikt voor de aarde).
We kiezen voor het werken in m, omdat de vraag gaat over een menselijke maat.

Stap 3:
Welke wiskunde gaan we gebruiken?
De driehoek MPR heeft een rechte hoek bij R (het raakpunt), dus de stelling van Pythagoras en/of goniometrie is bruikbaar.
Bij mogelijkheid A kiezen we nu voor de stelling van Pythagoras in MPR, met: MP = aardstraal + h, PR = kijkafstand a en RM = aardstraal.

Dit geeft $a = \sqrt{\left(\frac{40000000}{2\pi}+h\right)^2-\left(\frac{40000000}{2\pi}\right)^2}$

Een mooie formule waarmee a is te berekenen vanuit elke waarde van h.
Bij mogelijkheid B kiezen we voor goniometrie. De kijkafstand is nu de lengte van boog QR die is te berekenen vanuit hoek RMP. De cosinus van deze hoek is

$$\cos\angle RMP = \frac{40000000}{40000000+2\pi h}$$

Daarmee is die hoek (α) te berekenen en dus ook de kijkafstand, want de lengte van de boog is het $\alpha/360$ deel van 40000000 m.
Nu vragen we ons af of er hanteerbare uitkomsten uitkomen, bijvoorbeeld voor een ooghoogte van 1,70 m. Dit blijkt het geval te zijn…

Stap 4:
Ons model lijkt goed, we concluderen dat we een bruikbare methode hebben gevonden om de kijkafstand te berekenen. Kunnen we de formule nog compacter maken? Of kunnen we hem algemener maken (bijvoorbeeld zodat hij ook opgaat voor andere planeten en de maan)?

- **Uitbreiding, achtergronden, extra info**
  Er is een eenvoudige formule voor de kijkafstand bij mogelijkheid A als er wordt gebruik gemaakt van haakjes uitwerken het feit dat h^2 heel erg klein is ten opzichte van de andere term onder het wortelteken. Dan vind je
  $a \approx 3568 \cdot \sqrt{h}$.
  Het is leuk om deze kijkafstand eens te vergelijken met die op de maan.

Zwemmer in nood

Iemand staat op het strand aan de waterlijn. Schuin voor zich ziet hij een zwemmer in nood. Hoe kan hij zo snel mogelijk bij de zwemmer komen om hulp te bieden? Springt hij meteen in het water of loopt hij eerst een stuk langs het strand?

Opgave 5
Probeer zelf een oplossing te verzinnen.

In de volgende opgaven word je aan de hand van hulpvragen naar de oplossing geleid.

Opgave 6
a) Waarom is het waarschijnlijk verstandig om eerst een stuk langs het strand te lopen?
b) Probeer een schets te maken van de situatie. Neem aan dat je vlak langs de waterlijn kunt lopen en dat die waterlijn recht is.
c) Doe eens een paar aannames over afstanden en snelheden en geef die in je figuur aan als dat mogelijk is.
d) Om berekeningen te kunnen maken heb je vaak rechthoekige driehoeken nodig. Kun je die in je figuur vinden?

Opgave 7
Iemand heeft een figuur gemaakt waarbij punt A de persoon aan de waterlijn voorstelt, punt Z de zwemmer in nood en ABZ een rechthoekige driehoek is waarvan AB de waterlijn voorstelt. Hij neemt aan dat AB = 400 m en dat BZ = 200 m. De loopsnelheid neemt hij (bij hard lopen) 10 km/uur en de zwemsnelheid 2 km/uur.
a) Hoeveel tijd kost dan het bereiken van de zwemmer als er alleen wordt gezwommen?
b) En hoeveel tijd kost het bereiken van de zwemmer als het hele stuk AB eerst wordt gelopen en dan BZ wordt gezwommen?
c) Denk je dat er een keuze mogelijk is die minder tijd kost? Hoe dan? Kun je nu het probleem verder zelf oplossen?

Opgave 8
Misschien heb je bij de vorige opgave al bedacht dat een kortere afstand wordt bereikt als de persoon bij *A* niet helemaal van *A* naar *B* loopt, maar slechts een deel *AP* van die afstand.

a) Kies een waarde voor *AP* en bereken dan de tijd die nodig is om de zwemmer te bereiken.
b) Beschrijf de rekenprocedure als je verschillende waarden voor *AP* wilt kunnen kiezen.
c) Zijn de aannames voor de lengtes en de afstanden handig gekozen? Kun je dit verbeteren zonder het rekenmodel te verknoeien?

Opgave 9
Je kunt ook werken met een variabele voor de lengte van *AP*. Noem die lengte bijvoorbeeld *x*.

a) Stel een formule op voor de totale tijd die nodig is om *Z* te bereiken vanuit *A*.
b) Hoe kun je het probleem verder oplossen?
c) Hoe controleer je het antwoord?

Opgave 10

a) Probeer nu het complete model (inclusief de aannames) duidelijk te beschrijven.
b) Probeer het model nog verbeteren door de lengtes en snelheden ook variabel te maken. Je kunt dit doen door de formules aan te passen.
Je kunt dit ook doen met behulp van een rekenblad in Excel.

Uitwerking "Zwemmer in nood".
(opgaven 5 t/m 10)

- **Aanpak**
  De leerlingen moeten eerst op het idee worden gebracht dat je over het strand sneller kunt lopen (zeg 10 km/h) dan je kunt zwemmen (zeg 3 km/h).
  Vervolgens is het verstandig om eerst een tekening te maken van de situatie. Jij staat aan de kust bij *A* en de zwemmer zit in nood bij *Z*. De kustlijn is idealiter een rechte lijn, en het punt *P* waar je te water gaat ligt op de kustlijn. Enkele mogelijke punten *P* aan de kust tekenen, er zijn twee uiterste gevallen. Deze twee gevallen roepen als het ware de relevante afstanden op, laat ze waarden kiezen.
  Kennis van de stelling van Pythagoras is essentieel.
- **Tijd**
  De leerlingen werken aan deze opgave zelfstandig 30 minuten. De eerste 10 minuten zouden ze aan alleen opgave 5 moeten werken. Vinden ze dan geen aanpak, dan doen ze het vervolg.
- **Uitwerking**
  Stap 1:
  Je loopt een stuk sneller dan je zwemt, dus een stuk lopen verminderd de noodzakelijke zwemafstand. Dat lijkt gunstig voor de totale tijd die je onderweg bent.
  Aannames:
  - de zwemmer (punt *Z*) is 200 m uit de kust loodrecht gerekend vanaf een punt *B* dat 400 m van je (punt *A*) af is;
  - je loopt met bijvoorbeeld 10 km/uur en zwemt met 2 km/uur.

Stap 2:
Je maakt een schets van de situatie: rechthoekige driehoek ABZ met AB = 400 m en BZ = 200 m. Het is daarom handig om de snelheden om te rekenen naar m/s. (Tip voor de leerlingen: Misschien de getallen aanpassen zodat dit wat mooier uitkomt: loopsnelheid 9 km/uur en zwemsnelheid 1,8 km/uur.)
Dit is het moment om de twee extreme situaties (I: Je gaat meteen het water in en zwemt AZ, hoeveel tijd kost dat? II: Je loopt AB en zwemt dan BZ, hoeveel tijd kost dat?) door te rekenen. Hopelijk wordt er nu ontdekt dat je een stuk langs het strand moet lopen, maar niet het hele stuk AB.
Welke variabelen zijn er?
Bijvoorbeeld de afstand die je vanuit A langs de kust loopt noem je x en de totale tijd die je onderweg bent is $t(x)$.
Stap 3:
Welke wiskunde gaan we gebruiken?
Bij de extreme situaties kwam de stelling van Pythagoras al voorbij, dus die zul je opnieuw moeten gebruiken. Verder moet je omrekenen van afstand naar de tijd die je er over doet.
Stel je loopt tot punt P een punt op lijnstuk AB.

- Neem $AP = x$, dan is $PB = 400 - x$.
  Met behulp van de stelling van Pythagoras vind je
  $PZ = \sqrt{200^2 + (400 - x)^2} = \sqrt{200000 - 800x + x^2}$
  Dan wordt met een loopsnelheid van 9 km/uur en een zwemsnelheid van 1,8 km/uur
  $t(x) = 0{,}4x + 2\sqrt{200000 - 800x + x^2}$
  Deze functie invoeren in de GR en een minimum zoeken.
  Stap 4:
  Controle van je uitkomst (ligt de tijdsduur tussen de extremen in?).
  Algemener maken door de verschillende snelheden variabel te maken.
- **Uitbreiding, achtergronden, extra info**
  Redelijke loopsnelheden liggen tussen de 5 tot 15 km/uur (bij 15 km/uur ben je al aan het rennen). De zwemsnelheden zijn in ieder geval een stuk lager.
  Een mooie uitbreiding zit in het variabel maken van snelheden en afstanden.
  Er kan dan mooi worden ingegaan op het verschil tussen parameters en variabelen.

Griepepidemie

Griep is een besmettelijke ziekte die van mens tot mens wordt overgedragen. Als de griep opduikt is er sprake van gezonde mensen, zieke mensen en mensen die ziek zijn geweest maar beter zijn geworden. Alleen zieke mensen steken gezonde mensen aan. De gemiddelde ziekteduur is 4 dagen, daarna ben je geruime tijd immuun geworden. Je begint op een bepaalde dag met 100.000 personen waarvan er 100 ziek en 500 immuun zijn. Hoe verloopt het aantal zieken per dag, hoeveel is dit maximaal?
(Zie ook www.degrotegriepmeting.nl)

Opgave 11
Probeer zelf een model voor het ziekteverloop te verzinnen.

Schakel eventueel de computer en het rekenblad Excel in.

In de volgende opgaven word je aan de hand van hulpvragen naar een oplossing geleid.

Opgave 12

a) Welke drie grootheden kent dit probleem behalve de tijd in dagen?

b) Er bestaan verbanden tussen die drie variabelen. Kun je die weergeven in een schema (met pijlen)?

c) Waarom wordt gemiddeld elke dag 25% van de zieken weer gezond (en dus immuun)?

d) Neem aan, dat dagelijks een bepaald percentage van de zieken een gezond iemand aansteekt. Kies een vast percentage. Geef de percentages in je pijlenschema weer.

e) Heb je bij je eigen oplossing ook zo'n aanname gedaan?

Werk nu verder met de aanname die in d is gedaan.

Op $t = 0$ heb je 5000 zieken, 10.000 personen die immuun zijn en dus 85.000 gezonden. Hierin is t de tijd in dagen.

f) Hoeveel zijn dat er op $t = 1$ en op $t = 2$?

g) Hoe reken je nu verder?

h) Krijg je realistische uitkomsten?

Opgave 13

Iemand bedenkt nu het volgende:

$G(t)$ is het aantal gezonde personen op zeker tijdstip t.

$Z(t)$ is het aantal zieken en $I(t)$ is het aantal immune personen.

Een dag later zit je op tijdstip $t + 1$.

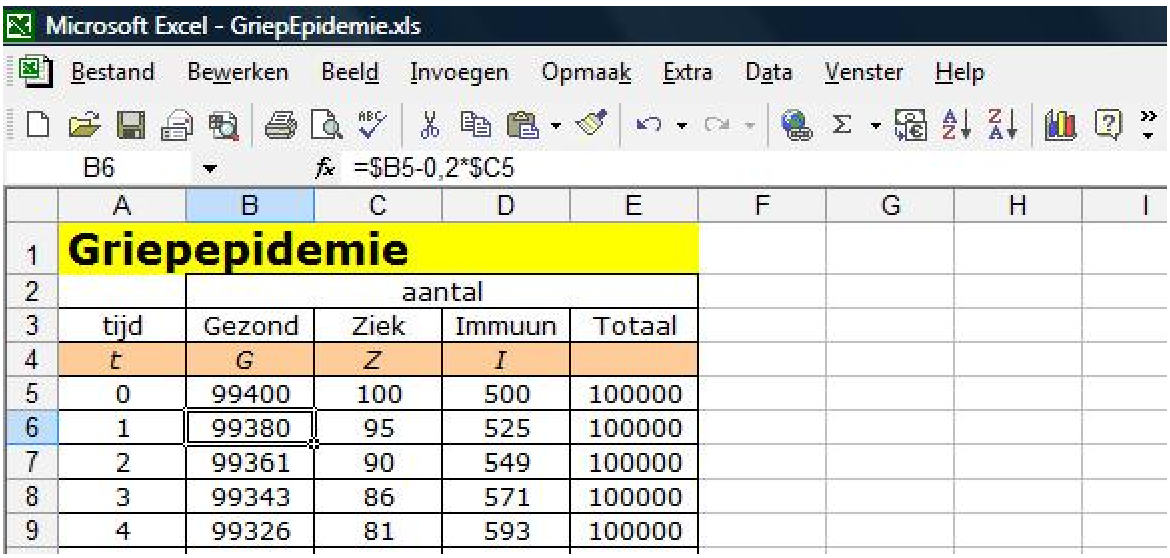
Dan is: $G(t + 1) = G(t) - 0{,}2 \times Z(t)$.

a) Leg deze formule uit. Hoe groot is bij hem de kans dat een zieke iemand anders ziek maakt?

b) Welke formule geldt nu voor $Z(t + 1)$ als elke dag 25% van de zieken beter wordt en er gezonde mensen ziek worden volgens de voorgaande formule?

c) Welke formule geldt er voor $I(t + 1)$?

d) In een rekenblad in Excel kun je dat in formules verwerken. Bekijk de figuur.



	A	B	C	D	E
1	Griepepidemie				
2		aantal			
3	tijd	Gezond	Ziek	Immuun	Totaal
4	*t*	*G*	*Z*	*I*	
5	0	99400	100	500	100000
6	1	99380	95	525	100000
7	2	99361	90	549	100000
8	3	99343	86	571	100000
9	4	99326	81	593	100000

In cel B6 staat de formule =$B5–0,2*$C5.
Leg uit dat dit overeen komt met de formule $G(t+1) = G(t) - 0{,}2 \times Z(t)$.
Wat staat er in cel C6? En in cel D6?

e) Hoe gaat de griepepidemie verlopen? Maak een tabel met je grafische rekenmachine.
Gebruik eventueel het rekenblad Excel.

f) Hoe zit het nu met het maximale aantal zieken? Lijkt het model erg realistisch?

Opgave 14

Bij nader inzien lijkt het beschreven model niet goed te zijn: het aantal personen dat ziek wordt gemaakt door iemand die al ziek is hangt natuurlijk vooral af van het aantal gezonde mensen (alleen die kunnen nog ziek worden). Dat zal geen vast percentage van het aantal zieken zijn. Dit hangt eerder af van het percentage gezonde mensen waarmee een zieke in contact komt en de kans dat dan ook de ziekte wordt overgedragen.

a) Het rekenblad in Excel wordt daarom wat aangepast.
In cel C6 komt nu =$C5-0,25*$C5+0,02*0,5*$B5.
Hieruit blijkt dat de kans dat de ziekte wordt overgedragen van een zieke op iemand die gezond is op 50% is gesteld. Hoe groot is het percentage gezonde mensen waarmee een zieke in contact komt volgens dit model?

b) Schrijf nu de drie bijbehorende modelformules op.

c) Hoe gaat de griepepidemie verlopen? Maak een tabel met je grafische rekenmachine of met het rekenblad Excel.

d) Lijkt dit model realistischer? Of zou je nog aanpassingen willen aanbrengen? En zo ja, welke dan?

e) Kun je een manier verzinnen om het model te testen?

Uitwerking "Griepepidemie"

(opgaven 11 t/m 14)

- **Aanpak**

  In eerste instantie discussie met de groep, na verloop van tijd werken de leerlingen de opgave met hulpvragen uit. De leerlingen die met deze startmodule gaan werken hebben waarschijnlijk nog nooit van rijen en recursie gehoord. Nodig lijkt dat ook niet, maar wellicht is daardoor wel wat hulp van de docent nodig. Bij dergelijke opgaven is het werken met Excel eigenlijk een must, maar eventueel kunnen de berekeningen ook met een grafische rekenmachine worden gedaan. De bijbehorende Excel-bestanden zijn beschikbaar via de site van het wiskunde D steunpunt van de TU-Twente. De stand van zaken m.b.t. de epidemie wordt gegeven door telling van de aantallen gezonde $G(t)$, zieke $Z(t)$ en herstelde, immune personen $I(t)$ op de t-de dag.
  Waarom is $G(t)+Z(t)+I(t)$ constant? Neemt $G(t)$ af? En $Z(t)$? En $I(t)$?
  Van belang is hoeveel dagen iemand, gemiddeld gesproken, ziek is. Bij een keuze van 4 dagen is de conclusie……dagelijks herstelt 25% van de zieke mensen. Ook belangrijk is de besmettingskans voor een gezond persoon. Dagelijks steekt (zeg) 20% van de zieken een gezond iemand aan. Laat de leerlingen uitrekenen met startgegevens G(0)=85000, Z(0)=5000, I(0)=10000 hoe de ziekte zich de volgende twee dagen ontwikkelt.

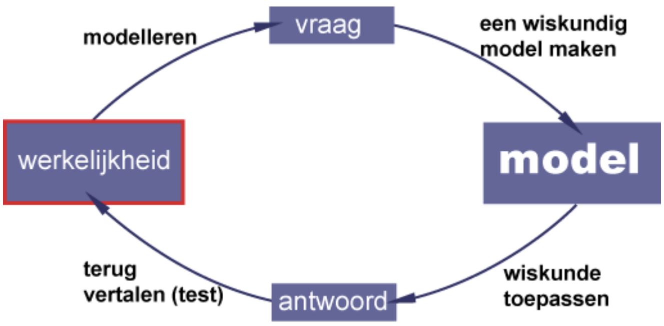
- **Tijd**
  30 minuten, waarvan de eerste helft discussie.
- **Uitwerking**
  De modelformules in termen van rijen zijn bijvoorbeeld in eerste instantie
  $G(t+1) = G(t) - 0{,}2Z(t)$
  $Z(t+1) = Z(t) - 0{,}25Z(t) + 0{,}2Z(t)$
  $I(t+1) = I(t) + 0{,}25Z(t)$
  Erg realistisch is dit niet, altijd neemt het aantal zieken af en bij een epidemie is dat raar.
  Het model wordt dan bijgesteld naar
  $G(t+1) = G(t) - 0{,}02 \times 0{,}5 \times G(t)$
  $Z(t+1) = Z(t) - 0{,}25Z(t) + 0{,}02 \times 0{,}5 \times G(t)$
  $I(t+1) = I(t) + 0{,}25Z(t)$
  Hierin is 0,5 de kans dat een zieke de griep overdraagt op een gezond iemand en 0,02 de kans dat hij met een gezond iemand in contact komt.
- **Uitbreiding, achtergronden, extra info**
  In werkelijkheid blijft iemand niet immuun, dus na verloop van een bepaalde tijd moeten de mensen die in de categorie “immuun” zitten weer terug vloeien naar de categorie “gezond”. Dat betekent een bijstelling van de modelformules. Ook kan natuurlijk worden gespeeld met de gekozen kansen. Je kunt dan (zeker met behulp van Excel) snel kijken welke invloed dit heeft op het verloop van het aantal zieken.

2. Modelleercyclus

In de opgaven in de voorgaande paragraaf heb je telkens de werkelijkheid vereenvoudigd. Bijvoorbeeld heb je aangenomen dat:

- de aarde zuiver rond is;
- een persoon kan worden voorgesteld door een lijnstuk of een punt;
- de waterlijn zuiver recht is;
- het aantal mensen dat door iemand die de griep heeft wordt aangestoken een vast percentage is;
- etcetera.

Je maakt vervolgens een wiskundig model door gebruik te maken van kwantificeerbare grootheden (dat zijn grootheden die door getallen kunnen worden uitgedrukt) en de verbanden ertussen. De conclusies die je trekt na berekeningen in dat wiskundige model vertaal je terug naar de werkelijkheid. Als het resultaat niet bevredigend is moet je het model aanpassen en opnieuw de modelleercyclus doorlopen, bekijk het schema.



Van werkelijkheid naar model

Stap 1: Je kijkt naar de werkelijkheid en stelt jezelf een **vraag** die je wilt oplossen: de **probleemstelling**. Je bedenkt welke **grootheden**, welke **variabelen** een rol spelen.

Stap 2: Je vereenvoudigt de werkelijkheid door **aannames** te doen en ontwerpt een wiskundig model dat zo goed mogelijk bij de situatie of je probleemstelling past. Geef duidelijke **definities** van de grootheden waarmee je gaat werken en waartussen je **verbanden** gaat zoeken. Je moet je ook goed realiseren (opschrijven desnoods) waarom je bepaalde dingen weglaat. (Zijn er verborgen aannames in je lijst? Het bedenken van extreme gevallen kan je helpen.)

Van model terug naar werkelijkheid

Stap 3: Je zoekt het **antwoord** op je vraag door in je model wiskundige berekeningen toe te passen. De **extreme gevallen** kunnen je helpen. Het antwoord kan de oplossing van een probleem (de vraag) zijn, maar ook een beschrijving van een bepaalde situatie.

Stap 4: Je kijkt of je antwoord wel past bij de **werkelijkheid**. Je moet als het ware je nog wiskundige antwoord 'terug vertalen'. Als dat kan ontwerp je ook een **test**. Daarmee onderzoek je of je model goed genoeg was of moet worden bijgesteld. In dat laatste geval doorloop je de cyclus opnieuw. (In toegepaste wiskunde blijkt een model vaak verschillende keren bijgesteld te zijn.)

Terugblikken

Kijk nu terug naar de opgaven in paragraaf 1.
Probeer de modelleercyclus te herkennen.

Opgave 15
Bekijk de opgaven bij "Kijkafstand" in paragraaf 1 nog eens.

a) Welke **grootheden** kende dit probleem?
Wat is het verschil tussen een grootheid en een **variabele**?
b) Welke **aannames** heb je allemaal gedaan?
c) Hoe heb je de kijkafstand in een schets aangegeven? Welke **definitie** van kijkafstand geef je daarmee? (Er zijn twee mogelijkheden bekeken.)
d) Heb je de kijkafstand van tevoren kunnen schatten? Welk nut heeft zo'n schatting?
e) Waarom is de vraag naar de eigenschappen van driehoek *MPR* heel belangrijk?
f) Over welke stap van de modelleercyclus gingen de voorgaande vragen?
g) Hoe gebruik je de rechthoekige driehoek in de mogelijke uitwerkingen?
h) Welke voorkennis had je nodig?
i) Over welke stap in de modelcyclus gingen de vragen g en h?
j) Hoe maak je de uitwerking zo algemeen mogelijk (verschillende kijkhoogtes)?
k) Wat doe je in de vierde stap van de modelleercyclus bij dit probleem?
l) Hoe kun je het model van de kijkafstand **testen** in de praktijk?

Opgave 16
Bekijk de opgaven bij "Zwemmer in nood" nog eens.

a) Welke **aannames** heb je gedaan?
b) Hoe heb je die in de schets van de situatie verwerkt?
c) Welke extreme gevallen heb je eerst doorgerekend?
d) Welke **variabele** heb je ingevoerd? Kon je ook een andere variabele kiezen?
e) Welke **verbanden** tussen de variabelen heb je gevonden?
f) Kun je het antwoord controleren? Beschrijf een mogelijke **test** (zonder dat je een zwemmer in nood moet inschakelen)?
g) Maak nu een overzicht van wat je bij elke stap van de modelcyclus hebt gedaan om dit probleem op te lossen.

Opgave 17
Bekijk de opgaven bij "Griepepidemie" nog eens.

a) Welke **aannames** heb je gedaan?
b) Waarom is het nuttig om een graaf (een schema met pijlen) kunnen maken van de situatie?
c) In het eerste model (opgave 13) werd er van uit gegaan dat dagelijks een bepaald (vast) percentage van de zieken een gezond iemand ziek maakt. Hoe zit dat in het model verwerkt?

d) Waarom lijkt die aanname niet te kloppen op grond van de resultaten van opgave 13? Is er nog een andere reden waarom die aanname niet zal kloppen?
e) Hoe wordt het model bijgesteld? Wordt daarbij de gehele modelcyclus opnieuw doorlopen?
f) Kun je een manier bedenken om het model verder te **testen**?
g) Maak nu een overzicht van wat je bij elke stap van de modelcyclus hebt gedaan om dit probleem op te lossen.

Uitwerking:
(opgaven 15, 16, 17)
Zie uitwerkingen "Kijkafstand", "Zwemmer in nood" en "Griepepidemie".
De vragen bij deze opgaven zijn uitsluitend bedoeld om richting te geven aan een groepsbespreking of een klassikale bespreking. Daarbij kunnen ook andere vragen aan bod komen, of vragen worden overgeslagen. Het gaat er nu om dat de leerlingen wat grip krijgen op het proces van modelleren door reflectie op de opdrachten uit de eerste paragraaf. Dit kost een lesuur of zelfs wat meer…

Hoe snel beweeg je als je stilstaat?

Je staat ergens op aarde stil, bijvoorbeeld in het centrum van Amsterdam.
Hoe snel beweeg je als gevolg van het draaien van de aarde?

Opgave 18
Stel hiervoor zelf een model op.
Maak daarbij gebruik van de modelcyclus. Probeer een manier te verzinnen om het model te testen.

Uitwerking:
(opgave 18)
- **Aanpak**
  Er is tijd nodig om leerlingen te laten inzien dat iedereen draait om de aardas en dat de straal van de cirkel die je beschrijft afhankelijk is van de breedtegraad. (De breedtegraad van Amsterdam is 52.3634 graden NB.)
- **Tijd**
  20 minuten.
- **Uitwerking**
  Stap 1:
  Je beweegt als gevolg van de draaiing van de aarde, ook als je stilstaat op het aardoppervlak. (Trouwens ook als gevolg van de beweging van de aarde om de zon, de zon om het centrum van het sterrenstelsel en het sterrenstelsel t.o.v. ???)
  Waar je op aarde zit bepaalt de snelheid, op de Noordpool is die snelheid 0. Je hebt dus de breedtegraad van Amsterdam nodig. De breedtegraad kan een variabele zijn. Er is dan een verband tussen de plek op aarde, de breedtegraad en de snelheid waarmee je beweegt.
  Stap 2:
  Aannames zijn bijvoorbeeld dat de aarde zuiver rond is en de aardas (Noordpool naar Zuidpool) een middellijn van een bol is. De omtrek van de aarde is 40.000 km.

Stap 3:
Je kunt dan aantonen dat je elke dag (24 uur) een cirkel aflegt met een straal van $(40000/2\pi) \cdot \cos(\alpha)$ km waarin α de breedtegraad is van de plek waar je staat. Teken daartoe een dwarsdoorsnede van de aarde (een cirkel) en geef er de breedtegraad (de draaihoek vanaf het vlak door de evenaar) in. Voor Amsterdam (52,3634 graden) betekent dit een straal van ongeveer 3887,526 km en daarom een afstand van 24.426,046 km per 24 uur, dat is ongeveer 1017 km/uur.
In het algemeen is de snelheid waarmee je beweegt:
$(40000/2\pi) \cdot \cos(\alpha) \cdot 2\pi / 24 \approx 1667 \cos(\alpha)$ km/uur.
Stap 4:
Het controleren hiervan is natuurlijk niet eenvoudig. Maar je zou kunnen kijken naar de zon (die in dit model in feite stilstaat). In een uur tijd lijkt de zon een zekere afstand langs de hemel af te leggen als gevolg van de draaiing van de aarde (als je het bewegen van de aarde om de zon even verwaarloost). Door die afgelegde afstand te meten en de (gemiddelde) afstand van de aarde tot de zon te gebruiken zou je de draaisnelheid van de aarde op jouw plek moeten kunnen benaderen.

- **Uitbreiding, achtergronden, extra info**
  Je zou ook kunnen kijken naar de beweging van de aarde om de zon.
  Veel gegevens zijn te vinden in de Wikipedia.

Trein op schaal

Je kent ze wel: de treintjes van Märklin of Fleischmann. Je ziet er hier ééntje die staat op de drijfstang van hetzelfde origineel.
Neem aan dat een echte loc met een snelheid van 60 km/h rijdt.
Hoe snel moet je het schaalmodel laten rijden om het 'echt' te laten lijken?

Opgave 19
Los dit probleem op volgens de modelcyclus.

Uitwerking:
(opgave 19)
Doel van deze opdracht is vooral het leren omgaan met eenheden in modelsituaties. Verder is het leren formuleren van het antwoord belangrijk. Wellicht komen veel leerlingen snel tot het juiste antwoord, maar dan hebben ze vaak toch veel moeite met het formuleren van de uitwerking.

- **Aanpak**
  De leerlingen moeten eerst de schaal van het model schatten of opzoeken: HO

betekent schaal 1:87.
Verder moeten ze op het idee komen dat de afstanden geschaald worden, maar de tijd niet.

- **Tijd**
  Ongeveer 10 a 15 minuten.
- **Uitwerking**
  Stap 1:
  Afstanden worden geschaald, de tijd echter niet.
  Stap 2:
  Doe eerst een aanname v.w.b. de schaal, probeer hem door meten in de foto te schatten, of zoek op wat HO-spoor voor schaal heeft. De schaal van het treintje is ongeveer 1:87.
  Stap 3:
  Een snelheid van 60 km/uur betekent dat een echte trein in een uur 60 km aflegt. Het model moet dan in een uur $60/87 \approx 0,69$ kilometer afleggen. Dat is ongeveer 0,69 km/uur.
  Stap 4:
  Probeer te meten hoe snel een trein van een modelspoorbaan beweegt. En vraag je af of je die beweging natuurlijk lijkt.
- **Uitbreiding, achtergronden, extra info**
  Deze opdracht lijkt maar weinig modelleeractiviteiten op te roepen, maar toch blijkt hij in de praktijk al lastig genoeg. Sommige leerlingen vinden op zich het antwoord wel snel, maar het motiveren van het antwoord is vaak moeilijk voor leerlingen. Vooral het je realiseren van de modelstappen is lastig.
  Uitbreiding naar willekeurige schalen ligt voor de hand.

3. Jezelf vragen leren stellen

Het opstellen van een wiskundig model is vaak nog een heel gepuzzel.

Het is belangrijk om actief te zijn: stel jezelf passende vragen en probeer die te beantwoorden. Daarbij moet je proberen te schematiseren en na te denken over de variabelen. In de voorgaande paragraaf is dat vaak voor je gedaan door hulpvragen te stellen. Een **serie mogelijke hulpvragen** vind je als bijlage achter in deze module.
Die lijst met vragen is beslist niet compleet: er zijn nog wel andere te verzinnen. Bovendien leer je hem natuurlijk niet uit het hoofd. Je houdt de modelleercyclus in de gaten en verzint zelf verstandige vragen.
Ook bij het beschrijven van de oplossing is het nuttig om steeds op te schrijven welke vragen je jezelf hebt gesteld en welke antwoorden (en aannames) dat tot gevolg had. Volg je dan de stappen van de modelcyclus, dan kom je als vanzelf tot een leesbare uitwerking van je modelleersituatie.

Fabriekshal

Een fabrikant van schoenen wil een nieuwe rechthoekige fabriekshal laten bouwen met een vloeroppervlakte van wel 2400 m^2. Hij dient een aanvraag in voor het aankopen van een rechthoekig stuk grond. Om de fabriek komen groenstroken en parkeerruimte, aan beide zijden en aan de achterkant stroken van 10 m breed, aan de voorkant een strook van 20 m breed. De fabrikant beoogt een zo klein mogelijk stuk grond te kopen dat aan deze eisen voldoet. Welke afmetingen heeft dit terrein?

Opgave 20: **Van werkelijkheid naar probleemsituatie**
a) Kun je een tekening maken? Zet de gegevens er zoveel mogelijk in.
b) Welke aannames heb je dan al gedaan?
c) Om welke grootheden gaat het? Welke daarvan zijn variabel?
Hier moet je keuzes maken. Je kunt bijvoorbeeld kiezen voor de lengte en de breedte van het terrein als grootheden, maar ook voor de lengte en de breedte van de fabriekshal zelf. De keuze heeft gevolgen voor het verdere rekenmodel. Verder spelen er twee oppervlaktes een rol.
d) Bestaat er een verband tussen de gekozen grootheden?

Opgave 21: Van probleemsituatie naar wiskundig model
Je probeert het probleem te vertalen in een wiskundig model.
a) Probeer eerst een getallenvoorbeeld door te rekenen? Kies bijvoorbeeld een getal voor de lengte (van fabriekshal of terrein) en kijk wat je allemaal kunt berekenen.
b) Probeer nog een paar getallenvoorbeelden, maak eventueel een tabel (in Excel?).
c) Kloppen je eenheden met elkaar?
d) Kun je uit de manier van rekenen aan de voorbeelden formules afleiden voor de verbanden tussen de variabelen? Kun je een formule opstellen voor de oppervlakte van het terrein?
e) Kun je de uitkomst van te voren schatten?

Opgave 22: Van wiskundig model naar uitwerking
Als alles goed is gegaan heb je nu een wiskundig model in de vorm van een formule voor de oppervlakte van het terrein.

a) Welke wiskundige technieken ken je om een minimum te bepalen?
b) Als je grafisch te werk gaat hoe kun je er dan voor zorgen dat je de grafiek goed in beeld krijgt?
c) Bepaal nu de minimale waarde van de oppervlakte.
d) Bepaal de waarde voor de lengte en de breedte van het terrein die bij de minimale oppervlakte horen.
e) Klopt het antwoord met de schatting?

Opgave 23: Van uitwerking terug naar de werkelijkheid

a) Hoe kun je het antwoord testen?
b) Welk advies formuleer je voor de fabrikant?

Opgave 24
Schrijf tenslotte een leesbare uitwerking van je modelleersituatie.

Uitwerking:
(opgaven 20 t/m 24)
Doel van deze opdracht is vooral het leren stellen van vragen. Wijs de leerlingen op de vragenlijst die als bijlage is meegeleverd. Deze lijst is geen voorschrift, maar een mogelijke set hulpvragen die uitbreidbaar is en per situatie anders.

- **Aanpak**
  Het gaat om het stellen van vragen, in de opgaven gebeurt dat, maar er zijn beslist andere vragen mogelijk.
- **Tijd**
  Ongeveer 20 minuten.
- **Uitwerking**
  Stap 1:
  De leerlingen moeten ontdekken dat de oppervlakte van het terrein afhangen van lengte en breedte. Daarbij kunnen ze als variabelen kiezen voor de lengte en de breedte van het terrein, maar ook voor de lengte en de breedte van de fabriekshal. Van die oppervlakte moet een maximum worden berekend, dus er moet een verband tussen de lengte en de breedte zijn dat kan worden gebruikt om de oppervlakte in ofwel de lengte ofwel de breedte uit te drukken. Een paar getallenvoorbeelden door rekenen kan helpen om dit te ontdekken.
  Stap 2:
  Aannames: de fabriekshal en het terrein zijn zuivere rechthoeken.
  Variabelen zijn ofwel L en B (lengte en breedte van het terrein) ofwel l en b (lengte en breedte van de fabriekshal) en de oppervlakte van het terrein. De constante is de oppervlakte van de fabriekshal.
  Stap 3:
  Mogelijkheid A: $opp(\text{terrein}) = L \cdot B$ en $(L - 20)(B - 30) = 2400$. Dit geeft
  $opp(\text{terrein}) = A(L) = \dfrac{2400L}{L-20} + 30L$.
  Deze functie kan worden geplot op de grafische rekenmachine (of bijvoorbeeld GeoGebra) en het minimum is:
  min.$A(60) = 5400$.
  Mogelijkheid B: $l \cdot b = 2400$ en

$opp(\text{terrein}) = A = (l + 20)(b + 30) = (l + 20)(\frac{2400}{l} + 30)$.

Deze functie plotten met de grafische rekenmachine (of bijvoorbeeld GeoGebra) en het minimum is: min.$A(40) = 5400$.

Stap 4:

De afmetingen van het terrein moeten worden opgegeven, dus behalve de lengte moet ook de breedte worden bepaald. Bij mogelijkheid A is de controle dat de fabriekshal nu inderdaad 2400 m^2 wordt. Bij mogelijkheid B is de controle dat het terrein nu groter dan 2400 m^2 wordt, maar wel van dezelfde orde van grootte is.

- **Uitbreiding, achtergronden, extra info**
  De grootte van de fabriekshal kan variabel worden genomen, evenals de breedte van de groenstroken. Zo is een zeer algemeen model te maken met een aantal parameters. In dat geval is het maken van een Excel-rekenblad een mooie uitbreiding.

Benzine of diesel?

Bij de aanschaf van een nieuwe auto heeft iemand de keuze uit twee uitvoeringen: een dieselversie en een benzineversie. Daar bestaat een groot prijsverschil tussen, bovendien is de wegenbelasting verschillend en ook de brandstofprijzen verschillen.
Stel een geschikt model op en geef een gemotiveerd advies.

Opgave 25

Los dit probleem op volgens de modelcyclus en waar nodig met behulp van de lijst met hulpvragen.

Zoek eventueel gegevens via internet.

Uitwerking:

(opgave 25)

- **Aanpak**
  Een mogelijkheid is het werken met de webpagina http://www.esset.nl/brandstof.htm. Dat is een pagina waarop na invoeren van gegevens betreffende brandstofkosten, verbruik per 100 km, enz., wordt uitgerekend (onder andere) bij welk aantal jaarlijks gereden km het voordeliger is om op diesel te rijden. Ook wordt de keuze voor gas als brandstof doorgerekend. Het model achter deze webpagina is dan het onderwerp van de opdracht.
  Welke variabelen en welke constanten een rol spelen wordt hiermee snel duidelijk.
- **Tijd**
  Ongeveer 20 a 30 minuten.
- **Uitwerking**
  Stap 1:
  Brainstormen of even spelen met de genoemde website. Verzinnen welke variabelen een rol spelen en welke constanten je moet opzoeken.
  Stap 2:
  Aannames: je gebruikt (gemiddeld) steeds hetzelfde aantal liters per 100 km. Je doet aannames betreffende de literprijs van benzine, diesel en het verbruik

per 100 km. Op de genoemde webpagina zijn de startwaarden € 1,30 per liter voor benzine met een verbruik van 10 L per 100 km, € 0,98 per liter voor diesel met een verbruik van 8 L per 100 km. Het prijsverschil is: de dieselauto is € 1500,00 per jaar duurder (hogere wegenbelasting, hoger jaarlijkse afschrijving omdat een dieselauto duurder is).
Variabelen zijn het aantal gereden km per jaar en de kosten per jaar.
Stap 3:
Model: x is het aantal gereden km per jaar en a zijn de vaste kosten per jaar van de benzineauto.
Benzineauto: kosten per jaar $K_B = 0{,}1 \cdot 1{,}30 \cdot x + a$.
Dieselauto: kosten per jaar $K_D = 0{,}08 \cdot 0{,}98 \cdot x + a + 1500$.
De kosten zijn gelijk als $0{,}1 \cdot 1{,}30 \cdot x + a = 0{,}08 \cdot 0{,}98 \cdot x + a + 1500$.
Dit geeft $x \approx 14.167$ km per jaar.
Stap 4:
Goede conclusie formuleren. Test bedenken.

- **Uitbreiding, achtergronden, extra info**
  De verschillende prijzen en kostenposten kunnen variabel worden gemaakt in een XL-bestand.
  Je kunt in Excel een pagina zoals de genoemde webpagina maken.
  Ook is het leuk om bijvoorbeeld een auto op gas mee te vergelijken.

Migratie

In een bepaald land is sprake van een trek van de bevolking van het platteland naar de stad. In een eenvoudig model wordt geen rekening gehouden met de instroom en de uitstroom van dit land. Ontwerp zo'n model en laat daarmee zien wat er in het bewuste land gebeurt met de verhouding tussen het aantal mensen in de stad en dat op het platteland.

Opgave 26
Los dit probleem op volgens de modelcyclus en waar nodig met behulp van de lijst met hulpvragen.
Werk eventueel met Excel.

Uitwerking:
(opgave 26)

- **Aanpak**
  Deze opgave is helemaal open, er zijn geen getallen voorhanden. Maar dat is ook niet nodig als je je bijvoorbeeld een land voorstelt met een bepaalde bevolkingsomvang (10 mln bijvoorbeeld met 6 mln plattelanders en 4 mln stadjers). Ook de percentages mensen die jaarlijks van stad naar platteland en omgekeerd verhuizen zijn redelijk vrij te kiezen. Het maken van een graaf is aan te bevelen en het werken met Excel is hierbij toch wel erg handig, zeker omdat geen voorkennis op het gebied van rijen kan worden verondersteld.
- **Tijd**
  Ongeveer 20 minuten, afhankelijk van het inzetten van een spreadsheet.
- **Uitwerking**
  Stap 1:
  Verzinnen welke variabelen een rol spelen en welke constanten je moet kiezen om de zaak realistisch te laten zijn.

Stap 2:
Aannames: 6 mln plattelanders, 4 mln stadjers, jaarlijks verhuist 15% van de plattelanders naar de stad en 5% van de stadjers naar het platteland. Maak hier een graaf van waarin ook de resp. 85% en 95% blijvers voorkomen.
Stap 3:
Als t de tijd in jaren is, dan is $P(t + 1) = 0{,}85 \cdot P(t) + 0{,}05 \cdot S(t)$ en $S(t + 1) = 0{,}15 \cdot P(t) + 0{,}95 \cdot S(t)$ met $P(0) = 6$ mln en $S(0) = 4$ mln.
Dit kan worden doorgerekend met een rekenmachine, tabel maken. Je kunt ook Excel inzetten.
Stap 4:
Het formuleren van de uitkomsten van het model en nagaan of ze overeenstemmen met een trek van stad naar platteland. Eventueel kunnen de migratiepercentages worden bijgesteld.

- **Uitbreiding, achtergronden, extra info**
  Eventueel is het wellicht mogelijk om via www.cbs.nl gegevens betreffende bijvoorbeeld Nederland of een regio in Nederland te vinden.

Slinger

Een kogel aan het eind van een opgehangen draad maakt een periodieke slingerbeweging als je de kogel een (kleine) uitwijking geeft.
Je probeert een formule te vinden voor de slingerperiode. Bepaal eerst de eenheden (dimensies) van de verschillende grootheden in je model. Probeer dan een simpel verband voor de periode af te leiden waarbij de dimensies in ieder geval kloppen.

Opgave 27
Los dit probleem op volgens de modelcyclus en waar nodig met behulp van de lijst met hulpvragen.

Uitwerking
(opgave 27)

- **Aanpak**
  Bij deze opgave is veel interactie met de groep van belang. De opgave kent een eenvoudige uitkomst, doch het idee achter de techniek van dimensieanalyse is belangrijk. Als demonstratie kan een slinger getoond worden, zeer aanschouwelijk!
  1. Wat wordt bedoeld met slingerperiode? Noem grootheden die deze periode beïnvloeden.
  De massa van de draad wordt niet in de berekening meegenomen, ze is verwaarloosbaar t.o.v. de massa van de kogel. Ook de luchtweerstand wordt genegeerd.
  2. Laat de eenheden (dimensies) noemen van de grootheden die mogelijk een rol spelen:
  Lente L (meter),
  Massa M (kilogram),
  Periode T (seconde),
  en ook de gravitatieconstante g (meter/seconde^2) speelt een rol.
  3. Wordt de periode groter/kleiner als de draad langer is? Voer het experimenteel uit. Ook verandering van massa is in het experiment op te nemen, en wat blijkt… geen invloed!

4. Suggereer de groep een formule , bijvoorbeeld periode $T = L \cdot M$
Deze formule kan op grond van dimensies niet kloppen: [sec] ≠ [meter] · [kilogram].

- **Materiaal**
  Voor het experiment een slinger en tijdwaarneming
- **Tijd**
  Ongeveer 30 minuten.
- **Uitwerking**
  Stap 1:
  Welke variabelen en constanten spelen een rol? En welke eenheden horen daar bij?
  L = lengte in m, T = periode in seconden, M = massa in kg, g = gravitatieconstante in m/s^2.
  Bepaal eventueel experimenteel welke invloed een veranderende L en M op T hebben.
  Stap 2:
  Lettend op de eenheden: L = lengte in m, T = periode in seconden, M = massa in kg, g = gravitatieconstante in m/s^2, moeten we M niet meenemen in de te vinden formule. T hangt alleen af van L en g.
  Stap 3:
  Controle van de dimensies bij bijvoorbeeld $T = L \cdot g$ of $T = L / g$ laat zien dat dergelijke verbanden niet kunnen.
  Het past wel als we kiezen
  $T = \sqrt{\frac{L}{g}}$, dus ook $T = \text{constante} \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$
  Stap 4:
  Experimenten voortzetten om te kijken of er inderdaad zo'n constante factor ontstaat en hoe groot die is.
- **Uitbreiding, achtergronden, extra info**
  Inderdaad blijkt onder ideale omstandigheden (geen wrijving) de periode onafhankelijk te zijn van de massa, en is de constante 2π.
  De harmonische oscillator wordt beschreven d.m.v. een differentiaalvergelijking voor de uitwijkingshoek φ(t), te weten $M \cdot L \cdot \varphi''(t) + M \cdot g \cdot \sin(\varphi(t)) = 0$, gelineariseerd $L \cdot \varphi''(t) + g \cdot \varphi(t) = 0$. Hieruit is een formule af te leiden in de vorm van een harmonische trilling (een zuivere sinusoïde) met trillingstijd $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$.
  Maar dit is theorie die vroeg in de bovenbouw te ver voert.

4. Enkele modelsituaties

Eigenlijk weet je nu alles wat nodig is als basis voor het modelleren. Eigen creativiteit is belangrijk, jezelf en elkaar vragen leren stellen is heel belangrijk, de grote lijn is de modelcyclus en de rest is volharding…

Hier vind je enkele modelsituaties waarin je zelf (samen met anderen) moet zoeken naar de oplossing. Die oplossing schrijf je dan zo op dat iedere willekeurige voorbijganger die kan begrijpen:

- alle stappen moeten duidelijk zijn aangegeven (gebruik de stappen van de modelleercyclus);
- alle aannames en vereenvoudigingen moeten duidelijk zijn verwoord;
- de keuzes van de grootheden en de eenheden moeten duidelijk worden weergegeven;
- alle berekeningen moeten helder worden weergegeven;
- de vergelijking met de werkelijkheid moet worden gemaakt.

Je noemt dit een **leesbare uitwerking** van de oplossing.
Bij de volgende probleemsituaties wordt zo'n leesbare uitwerking verwacht.
Werk met Excel als je daar handig mee bent.

Uitwerking:
(opgaven 28 t/m 31)
De volgende modelleerproblemen zijn beslist minder eenvoudig dan de voorgaande, maar nog wel te doen vroeg in de bovenbouw. Ze zijn goed geschikt als afrondende kleine praktische opdracht bij dit onderwerp. Zo'n afronding lijkt geschikter dan een schriftelijke toets.
Bij modelleerproblemen zoals deze blijven er altijd voor sommige leerlingen lastig te nemen hobbels te zijn. Uit de uitwerking bij elke opgave zijn hints te destilleren die eventueel desgevraagd kunnen worden verstrekt. Dit geeft ook nog een extra dimensie aan een mogelijke becijfering: het "kopen" van een hint kan een bepaald aantal punten kosten.
Het straatverlichtingsmodel is waarschijnlijk het moeilijkst, het is denkbaar om dat door iedereen te laten doen en uit de andere een keuze te maken.

Straatverlichting

Er wordt een nieuwe weg aangelegd. Hoe ontwerp je zo goedkoop mogelijk de straatverlichting, terwijl je er toch voor zorgt dat de weg goed is verlicht?

Opgave 28
Ontwerp een model voor de straatverlichting. Ga daarbij van de volgende gegevens uit.
De lichtsterkte S (in watt per m^2) is recht evenredig met het vermogen P (in watt) van de lichtbron en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand (in m) tot de lichtbron. (Kun je verklaren waarom dit zo is?)
Je verlicht de weg met straatlantaarns met een bepaald vermogen, een bepaalde hoogte en een bepaalde onderlinge afstand, neem aan dat die niet variëren.

Wettelijk is vastgelegd dat de lichtsterkte op elk punt van een weg moet liggen tussen 10 en 320 Watt/m^2.

Uitwerking:
(opgave 28)
De volgende variabelen spelen een rol:
P is de lichtsterkte in Watt van de lamp in elke straatlantaarn;
h is de hoogte in meter van de straatlantaarn (en dus van de lamp, nemen we aan);
a is de (vaste) onderlinge afstand in meter van een rij straatlantaarns aan één kant van de weg;
b is de breedte in meter van de weg (en dus van de twee rijen straatlantaarns, nemen we aan);
B is de brandtijd (uren per jaar) dat de lampen branden.
De lichtsterkte L (Watt per m^2) van elke afzonderlijke lamp is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tot de lamp. Dit is in te zien door dimensieanalyse, maar ook door te bedenken dat een oppervlak dat 2 keer zover van de lamp is verwijderd de lichtsterkte moet verdelen over een 4 keer zo groot geworden oppervlakte.
Het punt met de grootste lichtsterkte zit steeds recht onder de lamp en is dus

$$L = \frac{P}{h^2}.$$

Het punt met de kleinste lichtsterkte zit op het midden van de weg, midden tussen vier lantaarns in en heeft dus een lichtsterkte van

$$L = 4 \cdot \left(\frac{P}{h^2 + (\frac{1}{2}b)^2 + (\frac{1}{2}a)^2} \right).$$

We nemen dus aan dat andere lantaarns dan de omliggende geen bijdrage leveren aan de lichtsterkte in dit punt.
Dit levert twee voorwaarden op: $\frac{P}{h^2} \leq 320$ en $\frac{16P}{4h^2 + b^2 + a^2} \geq 10$.
Het inschakelen van een spreadsheet zoals Excel is nu handig om mogelijke waarden van P, h, a en b door te rekenen. Bijvoorbeeld P = 1000, h = 5, b = 8 en a = 30 voldoet aan de twee voorwaarden, maar er zijn veel meer mogelijkheden.
Voor de kosten zijn aannames nodig op het gebied van afschrijving en onderhoud van de palen. Die kosten hangen af van de hoogte h en de onderlinge afstand a (want hogere palen zijn duurder en een kleinere onderlinge afstand betekent meer palen). Verder zijn er kosten voor de elektriciteit: bijvoorbeeld 0,15 euro per kWh. (Dit betekent dat een lamp van 1 kW die een uur brandt € 0,15 kost.)
Neem nu bijvoorbeeld per jaar:
- € 200,00 per lantaarnpaal voor schoonhouden, reparaties, schilderwerk, e.d.
- € 50,00 per m lantaarnpaal voor vervanging, afschrijving, onderhoud
- € 0,15 per kWh

De jaarlijkse kosten per meter weg zijn dan

$$K = 2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(200 + 50 \cdot h + B \cdot \frac{P}{1000} \cdot 0{,}15 \right)$$

waarin B de brandtijd (het aantal uren per jaar dat de lampen branden) en $2 \cdot \frac{1}{a}$ het aantal palen per meter weg is.

Nu moeten de waarden voor *P*, *h*, *a*, *b* en *B* zo worden gekozen dat niet alleen aan de twee voorwaarden, maar ook aan *K* is minimaal is voldaan. Ook hier is werken met Excel erg handig.

Opmerkingen:

Het probleem kan worden vereenvoudigd door het aantal variabelen te verkleinen: bijvoorbeeld kunnen *P*, *h*, *b* en *B* worden gegeven en alleen *a* variabel is. De leerlingen kunnen dienaangaande zelf ook keuzes maken voor welke variabelen ze echt willen laten variëren en welke ze als constante willen aanmerken.

Ook aan de kostenkant kunnen meerdere variabelen worden gebruikt, de elektriciteitsprijs kan variëren en hetzelfde geldt voor de andere kosten.

Thuiswerkers

In de rotanmeubelenindustrie werd vroeger veel gebruik gemaakt van zogenaamde thuiswerkers. Dat waren mensen die in de avonduren zittingen van stoelen invlochten met pitriet. Stel je voor dat een rotanmeubelenbedrijf van die thuiswerkers in dienst heeft. Ze laten twee soorten stoelen invlechten door deze mensen en brengen en halen die stoelen met een bestelbusje. De tijd die nodig is voor invlechten verschilt per soort stoel. De winst die het bedrijf maakt verschilt ook per soort stoel.

Bij welke wekelijkse productie is de winst op deze stoelen maximaal?

Opgave 29

Neem eerst bijvoorbeeld aan dat er 11 thuiswerkers in dienst zijn, dat er in het busje 30 stoelen passen, dat soort A één avond invlechten betekent en soort B twee avonden. Neem ook aan dat elke thuiswerker 4 avonden per week werkt, dat de soort A een winst van 200 euro per stoel en soort B een winst van 300 euro per stoel oplevert.

Ga daarna het model algemener maken.

Uitwerking:

(opgave 29)

Kies *a* stoelen van soort A en *b* van soort B per week.

Er zijn in totaal 44 thuiswerkavonden beschikbaar, dus $a + 2b \leq 44$.

Er kunnen 30 stoelen in het busje. Neem aan dat het elke week één keer stoelen aflevert en ingevlochten stoelen komt halen. Dan is $a + b \leq 30$.

De winst op deze stoelen is $W = 200a + 300b$.

Met behulp van Excel is dit probleem snel op te lossen.

Vervolgens kan het aantal thuiswerkers en/of het aantal te vervoeren stoelen variabel worden gemaakt.

Vissen in de Grevelingen

De afsluiting van de Grevelingen had voor de visstand grote gevolgen. Om die gevolgen in kaart te brengen werden wiskundige modellen ontwikkeld. Onder andere voor de ontwikkeling van de scholpopulatie. Om een model te kunnen opstellen werden deze aannames gedaan:

- **jaarlijks komen er 5 miljoen larven het Grevelingenmeer binnen;**
- **jaarlijks komen 200.000 volwassen schollen (één jaar of ouder) het Grevelingenmeer binnen;**
- **90% van die larven sterven als jonge vissen (dus voordat ze 1 jaar zijn);**
- **33% van de volwassen vissen sterven jaarlijks.**

Opgave 30
Stel op grond hiervan een model op voor de ontwikkeling van de scholpopulatie.
Werk eventueel met Excel.

Uitwerking:
(opgave 30)
Er zijn twee soorten schollen: larven en volwassen schollen. Noem het aantal larven L en het aantal volwassen schollen V. Er gelden dan de volgende modelformules:
$L(t + 1) = 5$
$V(t + 1) = 0{,}2 + 0{,}1 \cdot L(t) + 0{,}67 \cdot V(t) = 0{,}7 + 0{,}67 \cdot V(t)$
Dit is gemakkelijk te vertalen in een Excel rekenblad.
Er ontstaat dan een soort geremde groei.
Opmerkingen:
Schollen paaien in de Noordzee en de larven bewegen met de waterstroming naar de kustzone (zoals het Grevelingenmeer).
Door de gegeven waarden te variëren kan worden gekeken of de scholpopulatie onder bepaalde omstandigheden kan uitsterven. Zie verder:
- http://home.hccnet.nl/pm.jansen/animals/schol.htm
- http://nl.wikipedia.org/wiki/Schol

De beste goot

Voor irrigatie van bouwgronden worden goten gebruikt. Die goten worden gemaakt door een zinken plaat van 50 cm breed en 2,5 m lang in een bepaalde vorm te buigen. De dwarsdoorsnede kan een rechthoek zijn, een symmetrisch trapezium of een halve cirkel. De lengte van elk gootstuk is 2,5 m, de breedte wordt gebogen.
Welke vorm en afmetingen krijgt een goot die zoveel mogelijk water kan bevatten?

Opgave 31
Los dit probleem voor de fabrikant van dergelijke goten op.

Uitwerking:
(opgave 31)
Halve cirkel:
straal is $50/\pi \approx 15{,}92$ cm, de inhoud is dan ongeveer: $0{,}5 \cdot \pi \cdot 15{,}92^2 \cdot 250 \approx 99.471{,}8$ cm^3 $\approx 0{,}995$ m^3.
Rechthoek:
randhoogte h geeft een inhoud van $I = 250 \cdot h \cdot (50 - 2h)$.
I maximaliseren geeft max.$I(12{,}5) = 78.125$ cm^3 en dus ongeveer $0{,}781$ m^3.

Trapezium:
Als α de hoek is die een opstaande rand met het verticale vlak maakt en x is de breedte van de opstaande rand, dan wordt de inhoud:
$I = x\cos(\alpha) \cdot (x\sin(\alpha) + 50 - 2x)$
Ook nu is het werken met Excel aan te bevelen, dan kunnen zowel x als α worden gevarieerd.

Bijlage: Mogelijke hulpvragen bij modelleren

Stap 1: Van werkelijkheid naar probleemsituatie

Eigenlijk is dit vaak de moeilijkste stap.
- Wat wordt er gevraagd, kan ik dat in eigen woorden zeggen?
- Heb ik alle gegevens?
- Welke vereenvoudigingen kan ik maken?
- Kan ik een schema, een tekening maken?
- Welke aannames kan ik doen?
- Welke grootheden spelen een rol en welke zijn variabel?
- Welke verbanden zijn er tussen de variabelen?

Stap 2: Van probleemsituatie naar wiskundig model

Je probeert het probleem te vertalen in een wiskundig model.
- Zijn de variabelen kwantificeerbaar?
- Kan ik een getallenvoorbeeld maken? Extreme situaties doorrekenen?
- Kan ik de verbanden (tussen kwantificeerbare grootheden) uitdrukken in wiskundige formules. Kloppen de eenheden met elkaar?
- Heb ik alle gegevens gebruikt, of zijn er nog verdere gegevens?
- Kan ik de uitkomst van te voren schatten?

Stap 3: Van wiskundig model naar uitwerking

- Is het een bekend model, of ken ik een model dat er op lijkt?
- Welke wiskundige technieken zal ik gaan gebruiken?

Je gaat nu wiskundige bewerkingen uitvoeren. Controleer elke stap op juistheid en probeer die juistheid aan te tonen. Werk zo overzichtelijk mogelijk. Je gaat na of het probleem volledig is opgelost en of je er iets van moet onthouden voor volgende problemen. Stel jezelf vragen als:
- Klopt het resultaat met mijn schatting?
- Hoe kan ik het resultaat verder nog controleren?
- Ben ik op de goede manier met eventuele afrondingen omgegaan?
- Heb ik de juiste eenheden gebruikt?

Stap 4: Van uitwerking terug naar de werkelijkheid

Je vertaalt de uitwerking die je hebt gevonden terug naar de werkelijkheid. Bedenk bijvoorbeeld een manier om het model te testen. Als het resultaat niet bevredigend is, stel je het model bij en doorloop je de modelleercyclus opnieuw.

Zelf modelleren,

wat ervaar je dan?

door

Dr. Nellie C. Verhoef en Ir. Xandra C. Snoeker

Programma

- Wie zijn wij?
- Waarom deze workshop?
- Wat gaat er gebeuren?
  - Zelf aan het werk
  - Theorie: Wat is modelleren?
  - Praktijk: Ervaringen in de klas
  - Tips voor docenten
  - Rondvraag

Zelf aan het werk

- Situatie
- Individueel (5 minuten):
  - laat de situatie op je inwerken
- In drietallen (30 minuten):
  - probeer te komen tot een wiskundig model
  - beantwoord de gestelde vraag

Te modelleren situatie

Iemand staat ergens aan het water.

Schuin voor zich ziet hij een zwemmer in nood.

Hoe kan hij zo snel mogelijk bij de zwemmer komen om hulp te bieden?

Opdracht 1

Beschikbare tijd: 5 minuten

Schrijf op welke vragen er bij je opkomen naar aanleiding van de gegeven situatie:

Iemand staat ergens aan het water.

Schuin voor zich ziet hij een zwemmer in nood.

Hoe kan hij zo snel mogelijk bij de zwemmer komen om hulp te bieden?

Opdracht 2

- Beschikbare tijd: 30 minuten
- Vorm drietallen
- Probeer een wiskundig model op te stellen
- Beantwoord de gestelde vraag

Modelleren, hoe doe je dat?

- begrijpen van de situatie
- vereenvoudigen
- schematische weergave maken
- invoeren van gekwantificeerde grootheden
- relaties vastleggen tussen die grootheden

NU HEB JE EEN WISKUNDIG MODEL

- getallen invoeren
- uitkomsten terugkoppelen
- andere getallen invoeren
- uitkomsten terugkoppelen
-

MODEL AANPASSEN

- cyclus herhaalt zich

Ervaringen in de klas

- Niveau: vwo 4, wiskunde D
- Lesmateriaal: Śtartmodule modelleren
- Benadering: top-down, dus direct aan het werk met een aantal te modelleren situaties
- Klassikale behandeling van drie modellen:
  - Kijkafstand op zee
  - Zwemmer in nood
  - Griepepidemie
- In groepjes een eigen model maken
- Model presenteren

Wat de leerlingen ervan vonden:

- Ik vond het een erg leuk project aangezien je de Wiskunde echt gaat toepassen, of probeert toe te passen, in de normale wereld.
- Ik vond de excursie naar de TU Twente ook leuk, het onderwerp was aardig actueel ...
- ... het presenteren en uitleggen van het model is ook een wezenlijk deel.
- Al met al ben ik zeer tevreden over het resultaat, alleen vond ik het jammer dat wij een onderwerp hadden gekregen met weinig mogelijkheden voor wiskundige diepgang, dat konden wij van tevoren niet weten, het onderwerp sprak me wel aan, wat ook erg belangrijk is.
- Ook was het een leuke mogelijkheid om te leren werken met Excel.

Opbouw lessenserie

- Wat is een (wiskundig) model?
- Opgave Kijkafstand
- Opgave Zwemmer in nood
- Hoe ziet de modelleercyclus eruit?
- Opgave Griepepidemie
- Les in Excel, formules maken
- Kiezen modelleeropdracht
- Opstellen model
- Rekenen met Excel
- Modelbeschrijving maken
- Powerpoint presentatie maken
- Bezoek aan UT: lezing en presentaties geven
- Beoordeling

Tips voor docenten

- Expert: de docent kent de wiskundige begrippen en technieken om problemen op te lossen
- Model: de docent doet de manier van denken voor
- Coach: de docent stimuleert en begeleidt het voortgangproces

Meer informatie bij:

Ir. X.C. Snoeker, xcsnoeker@concepts.nl
Dr. N.C. Verhoef, n.c.verhoef@utwente.nl

Universiteit Twente, Instituut ELAN.
Postbus 217
7500 AE Enschede